

# **ANÁLISE DE ESTRUTURAS DE EDIFÍCIOS ALTOS PELA TÉCNICA DO MEIO CONTÍNUO**

**José Elias Laier**  
Professor Titular  
Departamento de Engenharia de Estruturas  
Escola de Engenharia de São Carlos  
Universidade de São Paulo

São Carlos, março de 2024

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
Reitor – Prof. Dr. Carlos Gilberto Carlotti Junior Vice-Reitora –  
Profa. Dra. Maria Arminda do Nascimento Arruda

ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS  
Diretor - Fernando Martini Catalano  
Vice-diretor – Antônio Néelson Rodrigues da Silva



Esta obra é de acesso aberto. É permitida a reprodução parcial ou total desta obra, desde que citado a fonte e autoria e respeitando a Licença Creative Commons indicada

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Dr. Sérgio Rodrigues Fontes da EESC/USP

L185a                    Laier, José Elias  
                              Análise de estruturas de edifícios altos pela técnica do  
                              meio contínuo / José Elias Laier. -- São Carlos : EESC/USP,  
                              2024.  
                              [113]p.  
                              ISBN 978-65-86954-41-8  
                              DOI 10.11606/9786586954418

1. Análise de estruturas. 2. Edifícios altos.  
3. Técnica do meio contínuo. 4. Instabilidade global.  
5. Vibração livre. I. Título.

Elaborado por Elena Luzia Palloni Gonçalves – CRB 8/4464

## APRESENTAÇÃO

Este texto reúne o material ministrado na disciplina de pós-graduação intitulada “Análise de Estruturas de Edifícios pela Técnica do Meio Contínuo”, oferecida no Curso de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, sob o código SET5872. Os temas aqui trabalhados são mais voltados para os profissionais da área de Engenharia Civil, com especialização no ramo de estruturas.

A Técnica do Meio Contínuo constitui um modelo matemático de análise aproximada de estruturas de edifícios altos envolvendo, no caso de análise plana, apenas o movimento horizontal, e, no caso tridimensional as duas translações e a rotação do conjunto, sendo tais movimentos funções contínuas da variável altura; facultando-se assim, dado o pequeno número de parâmetros envolvidos, a abordagem mediante cálculo manual. Por essa razão é de grande utilidade nas fases iniciais do projeto, bem como um contraponto para os resultados mais requintados de uma análise via programas comerciais de computador. Em diversos exemplos de aplicação aqui apresentados foram considerados, na comparação, os resultados do programa Ansys, em sua versão Ansys Academic Research Mechanical, Release 19.1.

Cabe assinalar que a deformabilidade dos pilares, que pode afetar os resultados em algo da ordem de 10% a 20%, é levado em conta de maneira aproximada mediante procedimento simples, com bons resultados. O mesmo ocorre no caso da análise de instabilidade e vibração livre, mediante o emprego da Teoria da Perturbação de ordem zero, desprezando-se o acoplamento nas matrizes geométrica e de inércia. Além disso é de destacar também a formulação da flexão global das colunas de pórticos de modo consistente.

O autor agradece o capricho no preparo das figuras por parte de Francisco Guedes Brito, o apoio computacional levado a efeito por Dorival Piedade Júnior, bem como a bibliotecária Elena Luzia Palloni Gonçalves pelos cuidados no trâmite para a publicação do texto.

## SUMÁRIO

### CAPÍTULO I INTRODUÇÃO

1.1-Edifício Alto?	1
1.2- Histórico	1
1.3-Sistemas Estruturais	8
1.4-Técnicas Matriciais	12
1.5-Técnica do Meio Contínuo	13

### CAPÍTULO II

#### ANÁLISE DE PANÉIS DE CONTRAVENTAMENTO

2.1-Painel Parede	19
2.2-Painel Pórtico com Colunas Indeformáveis Axialmente	17
2.3-Exemplo de Aplicação	21
2.4-Pórticos Considerando-se Colunas Axialmente Deformáveis	21

### CAPÍTULO III

#### EFEITOS DE SEGUNDA ORDEM EM PAINÉIS DE CONTRAVENTAMENTO

3.1-Efeito de Segunda Ordem Padrão	32
3.2-Deformação Lenta	33
3.3-Carga Crítica do Painel Parede e Coeficiente de Instabilidade de Beck	35
3.4-Primeiro Exemplo de Aplicação	37
3.5-Carga Crítica do Painel Pórtico e Coeficiente de Instabilidade de Beck	38
3.6-Segundo Exemplo de Aplicação	40
3.7-Influência de Base Flexível	42
3.8-Solução Geral para Desalinhamento Qualquer	43

### APÊNDICE

Matriz de Flexibilidade	45
-------------------------	----

### CAPÍTULO IV

#### VIBRAÇÃO LIVRE NÃO AMORTECEIDA DE PAINÉIS DE CONTRAVENTAMENTO

4.1- Painel Parede	48
4.2-Primeiro Exemplo de Aplicação	51
4.3-Pórtico sem Deformação Axial dos Pilares	51
4.4-Segundo Exemplo de Aplicação	55
4.5-Pórtico com Deformação Axial dos Pilares	56
4.6-Terceiro Exemplo de Aplicação	58
4.7-Amortecimento Estrutural e Vibração Forçada	58

### APÊNDICE

Matriz de Massa discreta	59
--------------------------	----

**CAPÍTULO V****ASSOCIAÇÃO TRIDIMENSIONAL DE PAINÉIS**

5.1-Associação Tridimensional de Paredes	61
5.2-Relações Básica	62
5.3-Primeiro Exemplo de Aplicação	64
5.4-Associação Tridimensional de Pórticos sem Deformação axial das Colunas, Paredes e Núcleos Estruturais	66
5.5-Associação Tridimensional de Pórticos com Deformação Axial das Colunas,	71
5.6-Segundo Exemplo de Aplicação	72
<b>APÊNDICE</b>	
A.1-Parâmetros da Flexo-torção	80
A.2-Decomposição de Jordam	81

**CAPÍTULO VI****ASSOCIAÇÃO TRIDIMENSIONAL DE PAINÉIS: EFEITO  $P \Delta$** 

6.1-Associação Tridimensional de Paredes	82
6.2-Primeiro Exemplo de Aplicação	86
6.3-Associação Tridimensional de Pórticos com Colunas Indeformáveis Axialmente	82
6.4- Associação Tridimensional de Pórticos com Colunas Deformáveis Axialmente	90
6.5-Segundo Exemplo de Aplicação	91

**CAPÍTULO VII****ASSOCIAÇÃO TRIDIMENSIONAL DE PAINÉIS: VIBRAÇÃO LIVRE**

7.1-Associação Tridimensional de Painéis Paredes	93
7.2-Primeiro Exemplo de Aplicação	96
7.3-Associação Tridimensional de Pórticos com Colunas Deformáveis Axialmente	96
7.4-Segundo Exemplo de Aplicação	98

**CAPÍTULO VIII****TEMAS COMPLEMENTARES**

8.1- Associação de Paredes por Lintéis	100
8.2-Efeito das Variações de Temperatura	103
8.3-Exemplo de Aplicação	106

## CAPÍTULO I

### INTRODUÇÃO

#### 1.1-Edifício Alto?

Em primeiro lugar é oportuno registrar que um edifício é considerado alto, do ponto de vista da engenharia, quando os esforços decorrentes da ação do vento passam a ser significativos em comparação com os esforços decorrentes das ações verticais, peso próprio e cargas de ocupação; ou seja, grosso modo, quando os esforços do vento são superiores a 5% dos esforços provocados pelas cargas verticais. Essa definição comporta ainda acrescentar os efeitos de variação de temperatura, deformação lenta e retração, no caso de estruturas de concreto armado, bem como os efeitos de segunda ordem (efeito  $P \Delta$ ), que são aquelas decorrentes da movimentação horizontal experimentada pela estrutura. Em outras palavras, não é a altura física da construção que confere a qualificação na categoria de edifício alto, mas a magnitude dos efeitos decorrentes das ações horizontais.

#### 1.2-Histórico

Para muitos historiadores, o Farol de Alexandria, ilustrado na Figura 1.1, construído por volta do terceiro século antes de Cristo, em alvenaria e com altura entre 100 e 180 metros, constitui a mais alta construção em alvenaria de todos os tempos. Outra construção notável vem a ser o templo Tadaï-Ji, com 94 metros de altura, construído em madeira no Japão oito séculos depois de Cristo, sendo a mais alta construção de madeira de que se tem notícia. A basílica de Santa Sofia ilustrada nas Figuras 1.2 a) e 1.2 b) foi construída cinco séculos depois de Cristo em Constantinopla, antiga Bizâncio, cidade fundada pelos gregos, hoje Istambul, Turquia, com 55 metros de altura e cúpula central com 31 metros de diâmetro, constituindo-se, incontestavelmente, a maior construção do mundo antigo, e está em pé até os dias de hoje. Vale chamar a atenção para os gigantescos arcos portantes da cúpula, exibidos na Figura 1.2 a), arcos que dão suporte ao arranque da cúpula, cuja evolução resultou nos delicados arcos portantes góticos da bem conhecida Igreja de Notre Dame de Paris, construída algo como mil anos depois, como se vê na Figura 1.3.



Figura 1.1



Figura 1.2 a)



Figura 1.2 b)



Figura 1.3

A arquitetura românica tem na famosa Torre de Piza com 55 metros de altura, ilustrada na Figura 1.4, construída por volta do ano de 1170, um exemplo magnífico de torre dos campanários, a exemplo da torre fortificada de S. Geminiano com seus 68 metros de altura. As janelas das torres dos campanários, mais largas no topo e mais estreitas na base, já sinalizavam preocupações em conferir segurança nessas estruturas.



Figura 1.4

O aumento acentuado da concentração urbana verificada em fins do século 19 anunciava a busca por espaços verticais. Numa primeira fase, o emprego evoluído de construções de alvenaria era a solução disponível, mas logo se esgotaria, a exemplo do edifício Manadnock ilustrado na Figura 1.5, construído em Chicago em 1891, com 16 pavimentos, com paredes que na base chegavam a ter 4 metros de espessura, e que, no seu conjunto, ocupava algo como 25% da área útil do terreno! (pelo jeito estavam reinventando a pirâmide). Em geral, essas construções mesclavam alvenaria com colunas de ferro fundido e vigas de ferro forjado, cabendo à parede de alvenaria externa autoportante suportar às ações do vento; e internamente uma estrutura de vigas e pilares, sistema denominado esqueleto, suportava as cargas verticais dos pavimentos.

Inaugurando os novos tempos, a primeira estrutura independente, na qual se separam as funções de sustentação e de divisão, com as paredes externas também apoiando-se na estrutura de vigas e pilares, foi a solução desenvolvida pelo renomado arquiteto americano George Browne Post, com formação profissional na França, na construção do edifício New York Produce Exchange em 1981, em Nova York, com frente para o parque Bowling Green, como ilustrado na Figura 1.6, situado no Distrito Financeiro de Lower Manhattan, extremo sul da Broadway.





Figura 1.5



Figura 1.6

Para se ter uma ideia do vertiginoso crescimento vertical dos edifícios desde então, em 1989 os edifícios já chegavam 13 andares, em 1891 vinte andares e em 1896 a 29 andares. Na virada do século, o famoso edifício

Woolworth de Nova York, ilustrado na Figura 1.7 chegava aos 60 andares em 1913. O edifício Empire State Building, ilustrado na Figura 1.8, também em Nova York, atingia 100 andares em 1931. Em 1970 as duas torres do World Trade Center chegavam a 110 andares, como ilustrado na Figura 1.9, sendo destruídas em ataque terrorista em 11 de setembro de 2001. Pouco depois a Torre Sears de Chicago mostrada na Figura 1.10 chegava a 120 andares.



Figura 1.7



Figura 1.8



Figura 1.9



Figura 1.10

No local ocupado pelas duas torres do World Trade Center foi erigido o Freedom Tower com seus 541 metros de altura em 2009, como exhibe a Figura

1.11. Valendo-se ainda registrar o notável edifício Taipei 101, construído em Taipei, Taiwan, em 2004, com seus 508 metros de altura, como mostra a Figura 1.12. Finalizando-se essa exposição com o fantástico edifício Burj Khalifa, mostrado na Figura 1.13, com o inimaginável 828 metros de altura, construído em Dubai em 2010.



Figura 1.11



Figura 1.12



Figura 1.13

Voltando-se a atenção agora para as grandes escolas que davam suporte aos construtores de edifícios, vale inicialmente registrar a criação da Escola Politécnica de Paris em 1794, contemplando-se a formação de técnicos engenheiros, e é essa a formação dos grandes construtores do século 19. Em contrapartida, a criação da Escola de Belas Artes em 1803, com enfoque mais voltado para o lado artístico, dá origem a um outro profissional da construção, ou seja, o arquiteto. Todavia, a complexidade crescente das construções cada vez mais altas exigiu o concurso desses dois tipos de profissionais, tanto na elaboração dos projetos, como na execução das construções dos edifícios. Várias são as especialidades envolvidas, como especialistas em solos e fundações, hidráulica e saneamento, energia elétrica e iluminação, circulação vertical, telefonia e comunicação, climatização e outras, bem como em paisagismo.

Pois bem, no sentido de se atender com sucesso ao conjunto de problemas característicos dos edifícios altos, vários sistemas estruturais, como mostrado na Figura 1.14, têm sido propostos.

### **1.3-Sistemas Estruturais**

O primeiro sistema que merece destaque, porquanto vem a ser o mais empregado na maioria dos edifícios construídos, tanto em estrutura de concreto armado, como em estrutura metálica, consiste no sistema aporticado, como lustrado na Figura 1.14 a). A estrutura, nesse caso formada por vigas e pilares, responde às solicitações horizontais por meio dos pórticos formados segundo as linhas de prumadas dos pilares. Trata-se de sistema indicado, em geral, para edifícios de concreto armado com até 20 andares, e metálicos indo até 30 andares. A preocupação primordial nesses casos é ainda mais voltada para as ações verticais, e cuja eficiência estrutural decorre de um posicionamento

adequado dos pilares em planta. No caso de estruturas em concreto armado, mais comum em nosso meio, uma primeira orientação consiste em se buscar a posição dos pilares segundo uma malha de quatro metros por quatro metros. O comportamento da estrutura aporticada sob ação de cargas verticais é bastante simples, sendo as cargas distribuídas entre os pilares, por exemplo, segundo as chamadas áreas de influência. Um estudo mais requintado da distribuição das cargas verticais entre os pilares exige uma investigação cuidadosa do comportamento conjunto do sistema de piso, formado por lajes e vigas, mediante simulação pelo método dos elementos finitos, por exemplo. De qualquer modo, o comportamento da estrutura sob carga horizontal não é mais atendido pela simplicidade do critério das áreas de influência, embora no início a força sugestiva desse critério tenha sido trabalhada, mas logo abandonada em prol de critérios mais adequados.

Para edifícios de concreto armado na faixa de 20 a 30 andares o sistema estrutural mais adequado passa a ser a associação de núcleo estrutural com o sistema aporticado menos rígido, como ilustra-se na Figura 1.14 b), ou mesmo o sistema aporticado com algumas colunas de grande inércia. A variante metálica desse sistema obtém-se acrescentando treliçamento vertical bastante rígido, como ilustrado na Figura 1.14 c), indicada para edifícios numa faixa de 30 a 40 andares. As preocupações agora voltam-se acentuadamente para os problemas de estabilidade horizontal do conjunto. Esse sistema tem sido indicado em regiões sismicamente ativas, pois o sistema de pilares dos pórticos que suportam as cargas verticais, é mais flexível horizontalmente, participando pouco na resposta às cargas horizontais, que acabam solicitando muito mais o núcleo resistente mais rígido, funcionando-se assim como um equivalente mecânico do eletrodo sacrifício na proteção contra oxidação de estruturas metálicas. Em outras palavras, num terremoto mais intenso o núcleo acaba absolvendo o choque, sendo posteriormente reparado os seus danos, como os chilenos conhecem bem.

A associação tridimensional de pórticos periféricos e núcleos resistentes, como mostrado na Figura 1.14 d), vem a ser o sistema estrutural indicado para edifícios de concreto na faixa de 30 a 40 andares. A versão metálica desse sistema, no qual o núcleo resistente é obtido mediante treliçamento interno equivalente de grande rigidez, atendendo-se a faixa de 40 a 60 andares. O treliçamento interno pode ser conjugado com cintas treliçadas, geralmente à meia altura e no topo, decorrentes do treliçamento de quadros periféricos de um mesmo andar, como exhibe-se na Figura 1.14 e).

O sistema tubular, que consiste em se dispor de um grande número de pilares periféricos ligados por uma cinta periférica feita por viga de grande rigidez (referido como “spandrel beams” em língua inglesa), de tal sorte a conferir ao conjunto um comportamento similar ao de um gigantesco tubo, ou seja, uma grande barra de seção celular, como mostra a Figura 1.14 f). O sistema tubular em concreto armado cobre uma faixa com mais de 50 andares e, no caso metálico além de 60. Um tubo único cobre, no caso de concreto armado, a faixa de 50 a 60 andares; no caso metálico de 60 a 80 andares. O emprego de um

tubo modular (células múltiplas), como ilustrado na Figura 1.14 g), permite os edifícios de concreto armado chegarem a 80 andares. Esse mesmo sistema, mediante treliçamento dos tubos, como exhibe a Figura 1.14 h), torna viável, no caso metálico, alcançar até 140 andares. Um exemplo dessa variante está mostrado na Figura 1.15. Trata-se do edifício John Hancock Center de Chicago, EUA.

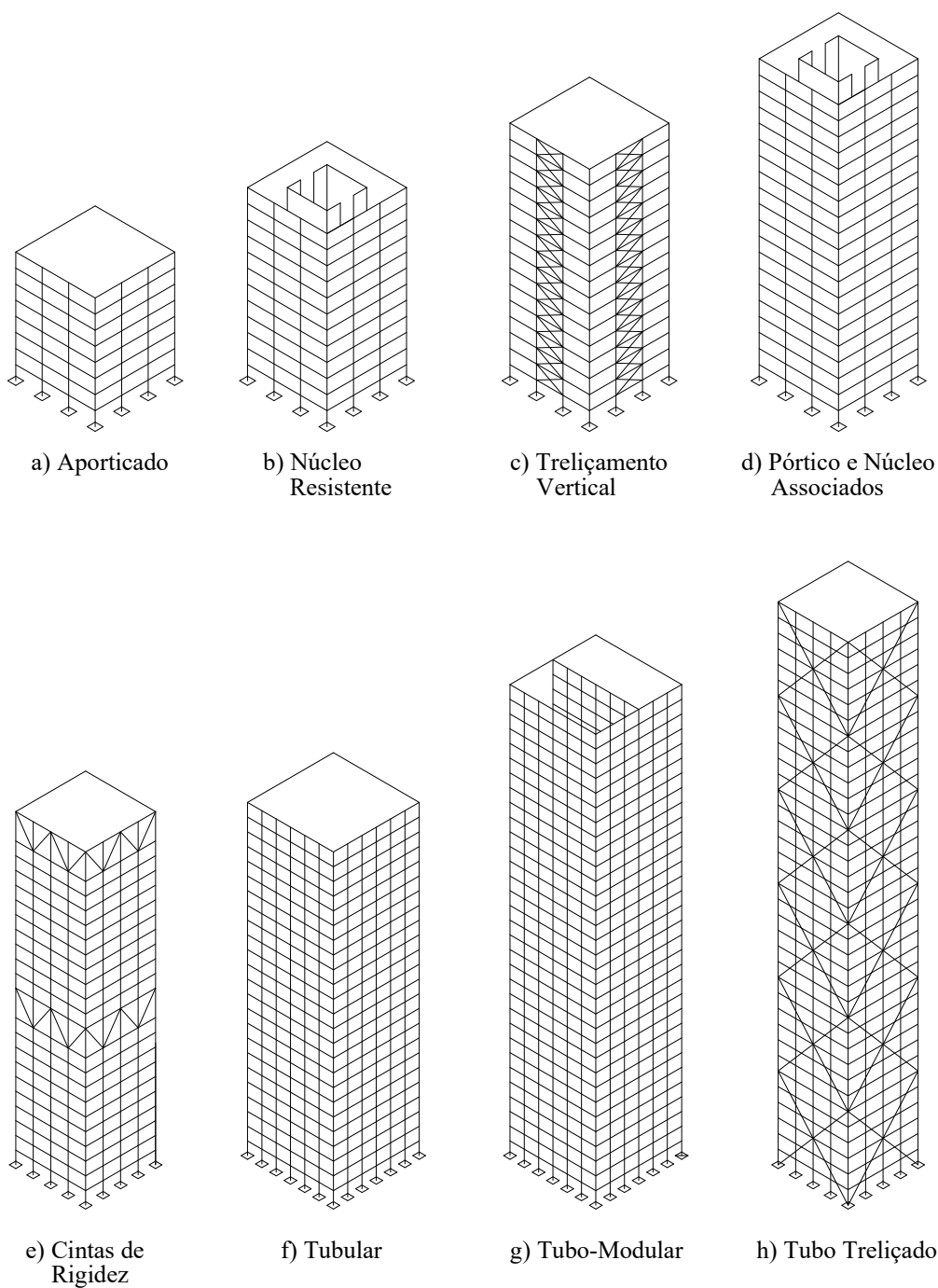


Figura 1.14

A associação de estruturas tubulares permite vislumbrar, como exemplificado pela torre Burj Khalifa, não haver ainda um limite de altura para os edifícios.

A sistema tubular ganhou destaque inicialmente na recuperação das pontes na Alemanha no pós-guerra, envolvendo os bem preparados engenheiros aeronáuticos alemães que, naquela época estavam sem o que fazer, uma vez que a derrotada Alemanha ficou proibida de fabricar aviões. Como os engenheiros aeronáuticos estavam acostumados a projetar as estruturas tubulares dos aviões, acabaram por estender esse sistema com sucesso para as estruturas de pontes. Curiosamente, quando esse sistema começou a ser usado em outros países, uma série de rupturas acabaram ocorrendo com pontes de grandes vãos. Até que chegou a vez de ocorrer também na Alemanha. Estudando-se o que estava ocorrendo, verificaram que era uma instabilidade de chapa por cisalhamento na região dos apoios. Para nossa tranquilidade, a ponte Rio-Niterói foi construída quando esse problema já estava resolvido. O emprego do sistema tubular em estrutura de edifícios começou nos anos setenta, tendo nas duas torres do World Trade Center exemplos notáveis.



Figura 1.15

#### 1.4- Técnicas Matriciais

A formulação matricial desenvolvida por Weaver e Nelson em 1966 foi um marco notável nas propostas de algoritmos computacionais para análise de estruturas de edifícios (Weaver Jr, W. e Nelson, M.F. “Three-Dimensional Analysis of Tier Building”, J. Str. Div, ASCE, ST6, 1966), no qual a estrutura de piso é simulada por um diafragma rígido em seu plano e completamente flexível transversalmente. Porém, nessa época os computadores ainda tinham capacidade de processamento muito limitada, e assim métodos mais simplificados foram propostos, como o desenvolvido por Stamato e Smith



(Stamato, M.C. e Smith B.S. “An Approximate method for the three dimensional analysis of tall buildings” Proc. Inst, Civil Engineers, London, V.43, July/1969). Tais métodos são também indicados para análise do sistema tubular, cujo comportamento apresenta o chamado efeito “shear lag”, que consiste no fato de ser a força normal nas colunas maior nos cantos, reduzindo-se para a região central, como ilustra a Figura 1.16, tanto para o pórtico alma (flange frame), quanto para o pórtico mesa (web frame) em termos percentuais.

É oportuno também deixar registrado o pioneirismo do Prof. Julio Ricaldoni com seu trabalho intitulado “Nota Sobre El Efecto de Torsion em Edifícios Elevados” publicado pela Facultad de Ingenieria Y Agrimensura de Montevideo, Uruguai, em 1958, certamente um dos primeiros trabalhos publicados na América Latina sobre o comportamento de estruturas de edifícios altos.

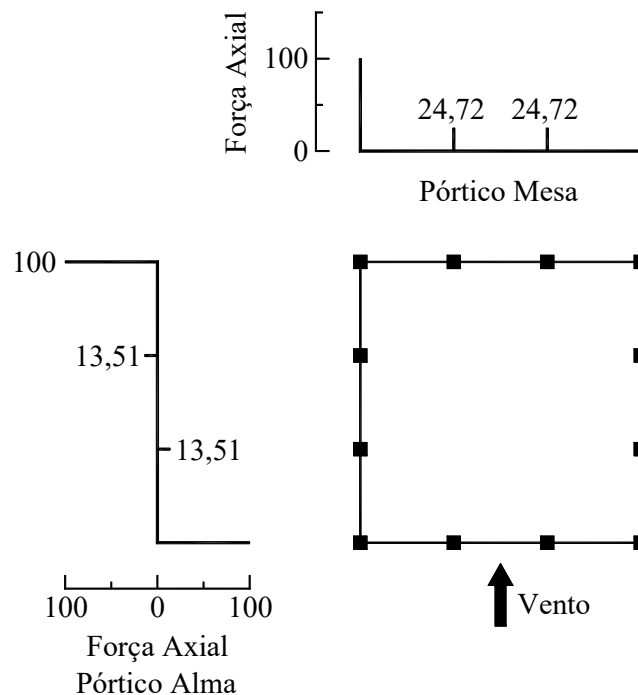


Figura 1.16

### 1.5- Técnica do Meio Contínuo

Por outro lado, o modelo de análise estrutural denominado Técnica do Meio Contínuo, uma proposta mais apropriada para cálculo manual, e por essa razão mais indicado para os estágios iniciais do projeto, foi pioneiramente desenvolvido por Chitty já na metade do século passado (Chitty, L, “On the Cantilever composed of a series of parallel beams interconnected by cross members” Philosophical Magazine, V38, 1947), merecendo extensão no livro de Murashev, Sigalov e Baikov (Murashev, V., Sigalov, E. e Baikov, V. “Design of

Reinforced Concrete Structures, Mir Publisher, Moscow, 1972) e também na eficiente proposta de Stamato e Mancini (Stamato, M.C. e Mancini, E. "Three Dimensional interaction of wall and frames" Journal of the Structural Division, ASCE, V. 99, 1973), sem contar a contribuição notável do calculista estrutural Mario Franco em sua tese de doutorado defendida em 1962 na Escola Politécnica da Universidade de São Paulo intitulada "Alguns Problemas Relativos à Ação do Vento em Edifícios de Grande Altura".

Tendo-se em conta que os métodos matriciais já se encontram amplamente desenvolvidos e implementados em pacotes computacionais disponíveis no mercado, o presente texto vai ter sua atenção voltada apenas para a Técnica do Meio Contínuo. Todavia, cumpre chamara a tenção para o fato de que, para municiar tais pacotes disponíveis no mercado, a tarefa é algo trabalhosa e susceptível de inúmeros equívocos.

A característica mais notável da Técnica do Meio Contínuo consiste em viabilizar procedimentos manuais, por envolver basicamente apenas os três movimentos horizontais da estrutura, quais sejam, duas translações e uma rotação do conjunto, e, por essa razão, as equações resultantes envolvem em geral duas matrizes de ordem  $3 \times 3$  no caso da análise estática, e mais uma dessa mesma ordem nos casos de análise de instabilidade e de dinâmica. O desacoplamento das equações no caso da análise estática é obtido mediante uma escolha adequada do sistema de referência, acrescido do emprego da decomposição de Jordam da segunda matriz. Todavia nos casos da análise de instabilidade e da análise dinâmica resultando-se a terceira matriz não diagonal, torna-se necessário o emprego do estudo aproximado proporcionado pela Teoria da Perturbação. A inclusão da deformação axial das colunas é viabilizada mediante simplificações adicionais, de modo serem explicitadas em termos daqueles três movimentos horizontais, bem como tratamento simplificado é também o caso da consideração da interação solo-estrutura (fundação elástica).

O Capítulo II é dedicado ao estudo do comportamento dos painéis de contraventamento, iniciando-se com o de descrição mais simples que consiste no painel denominado parede, Trata-se de um consolo vertical cujo comportamento é descrito pela Teoria Técnica da Flexão, assunto amplamente discutido nos textos básicos de Resistência dos Materiais, seguido do estudo do pinel pórtico com colunas indeformáveis axialmente, chamando-se a atenção para a consideração da flexão global das colunas, e extensão para pórticos com colunas deformáveis, bem como já deixando claro que a consideração da deformação axial das colunas aumenta a ordem de derivação das equações resultantes, aumentando-se o montante de operações algébricas, tonando-se não mais apropriado o cálculo manual a consideração da deformação axial de várias colunas. De qualquer modo o emprego de parâmetros médios de sorte a não levantar a ordem de derivação se mostra bastante apropriado.

O estudo do efeito de segunda ordem em painéis, bem como a contribuição da deformação lenta, são objetos do Capítulo III, iniciando-se com a exposição do modelo padrão e sua aplicação ao painel parede e abordagem

do coeficiente de instabilidade de Beck, bem como a extensão para o caso do painel pórtico, cuja integração é então viabilizada por meio de uma matriz de flexibilidade, descrita em detalhes no apêndice. A consideração de base flexível é levada a efeito aproximadamente mediante o emprego do Teorema de Southwell.

O Capítulo IV aborda a questão da vibração livre de painéis, iniciando-se com o caso do painel parede, cuja integração das equações de movimento não oferece dificuldades algébricas de monta. Todavia, no caso do painel pórtico a integração é novamente viabilizada mediante o emprego daquela matriz de flexibilidade empregada no estudo dos efeitos de segunda ordem tratados no capítulo anterior. Em apêndice os detalhes dessa abordagem são apresentados.

A análise associação tridimensional de painéis, objeto do Capítulo V, inicia-se com o caso só contendo painéis paredes, seguido da associação tridimensional de pórticos sem deformação axial das colunas, paredes e núcleos estruturais, cujo equilíbrio resulta num sistema de equações diferenciais de terceira ordem envolvendo duas matrizes de ordem três. A primeira matriz, contemplando a contribuição flexional das paredes e núcleos, é desacoplada mediante a escolha de um sistema de referência adequado. Já a diagonalização da outra matriz, que contempla as contribuições dos pórticos e torção livre dos núcleos, é levada a efeito mediante a decomposição de Jordam, sendo fornecida as fórmulas de Cardam para as raízes da equação algébrica do terceiro grau resultante. A consideração da deformação axial das colunas mediante parâmetros médios acaba sendo uma extensão simples. Em apêndice são apresentados parâmetros de flexo-torção de dois perfis típicos, bem como uma demonstração expedita da decomposição de Jordam.

O estudo dos efeitos de segunda ordem (efeito  $P \times \Delta$ ) em estruturas tridimensionais é iniciado no Capítulo VI com o caso só envolvendo painéis paredes, cuja integração exata é alcançada. A associação tridimensional envolvendo paredes e pórticos com colunas indeformáveis axialmente é examinada em seguida, sendo necessário lançar mão da Teoria da Perturbação de ordem zero, de sorte a contornar o acoplamento da matriz geométrica contendo os termos de carregamento axial. Tal procedimento é então estendido para o caso envolvendo pórticos com colunas deformáveis mediante a consideração dos parâmetros médios já mencionados.

A vibração livre da associação tridimensional de painéis é apresentada na Capítulo VII, iniciando-se com a consideração apenas de painéis paredes, visto que mais elementar, e cuja integração analítica da equação de movimento é alcançada. O caso mais geral, envolvendo pórticos com deformação axial das colunas, é tratado mediante o emprego da Teoria da Perturbação de ordem zero.

O Capítulo VIII aborda temas complementares, começando por mostrar que a associação de paredes por lintéis, objeto do trabalho pioneiro de 1947 já mencionado, mediante uma nomenclatura adequada tem seu comportamento descrito como uma extensão de pórtico com deformação axial das colunas. O efeito das variações de temperatura em colunas expostas é estudado em

seguida, mediante uma extensão da técnica do meio contínuo proposta pelo autor, considerando-se apenas o quadro mais externo do edifício. Exemplo de aplicação deixa claro trata-se de uma proposta com resultados similares aos alcançados mediante pacote computacional.

## CAPÍTULO II

### ANÁLISE DE PAINÉIS DE CONTRAVENTAMENTO

#### 2.1- Painel Parede

Para suportar cargas laterais, o painel de comportamento estrutural mais simples vem a ser o denominado painel parede, que consiste num consolo vertical, uma coluna engastada na base, como exhibe a Figura 2.1, tendo na teoria técnica da flexão, ensinada na disciplina de Resistência dos Materiais, o modelo de representação.

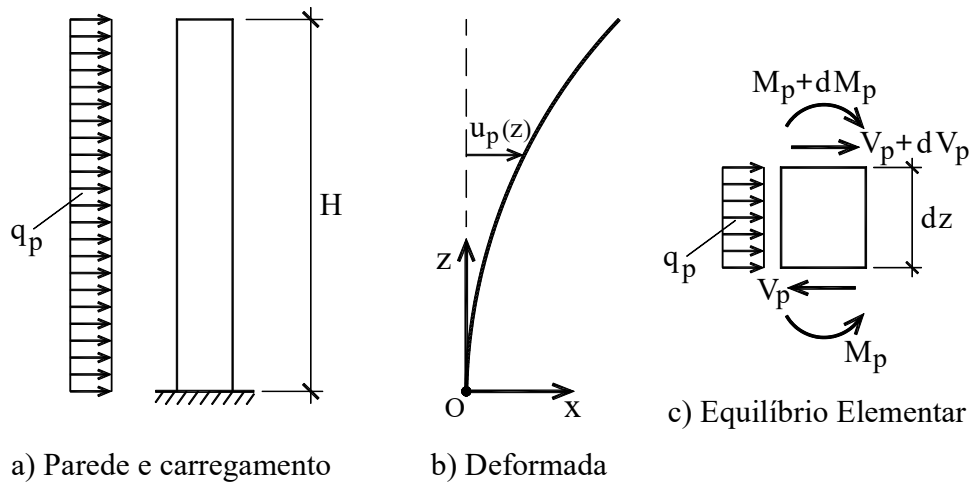


Figura 2.1

A Figura 2.1a) mostra uma parede sob carga distribuída uniforme horizontal  $q_w$ , a deformada  $u_w(z)$  exibida na Figura 2.1b), bem como a configuração de equilíbrio elementar na Figura 2.1c), resultando nas relações:

$$\begin{aligned} \frac{dV_w(z)}{dz} &= -q_w \\ \frac{dM_w(z)}{dz} &= -V_w \end{aligned} \quad (2.1)$$

onde  $V_w(z)$  é a força cortante ao longo da altura e  $M_w(z)$  o momento fletor. Por outro lado, a equação constitutiva do painel parede é expressa por:

$$M_w(z) = j_w \frac{d^2 u_w(z)}{dz^2} \quad (2.2)$$

onde  $j_w = EI_w$  é o produto de inércia, ou ainda, tendo-se em conta a integração da primeira e segunda de (2.1) e derivação de (2.2), uma forma mais apropriada, ou seja:

$$\frac{d^3 u_w(z)}{dz^3} = -\frac{V_w(z)}{j_w} = \frac{q_w(H-z)}{j_w} \quad (2.3)$$

cuja integração resulta:

$$u_w(z) = \frac{q_w H^4}{24 j_w} \left( \left( \frac{z}{H} \right)^4 - 4 \left( \frac{z}{H} \right)^3 + 6 \left( \frac{z}{H} \right) \right) \quad (2.4)$$

que consiste na deformada do pórtico, uma vez que as condições de contorno são:

$$\begin{aligned} u_w(z=0) &= 0 \\ \frac{du_w(z=0)}{dz} &= 0 \\ \frac{d^2 u_w(z=H)}{dz^2} &= 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

ou seja, a primeira de (2.5) decorre do fato de ser nulo o deslocamento da parede na base, e a segunda de (2.5) do fato de ser nula a rotação da parede na base; e a terceira de (2.5) da nulidade do momento fletor no topo.

## 2.2-Painel Pórtico com Colunas Indeformáveis Axialmente

A Figura 2.2a) ilustra um pórtico sob carga lateral distribuída uniforme  $q_f$ , bem como sua deformada  $u_f(z)$  na Figura 2.2b), já considerada de maneira aproximada mediante uma função contínua, cuja explicação é apresentada no que se segue.

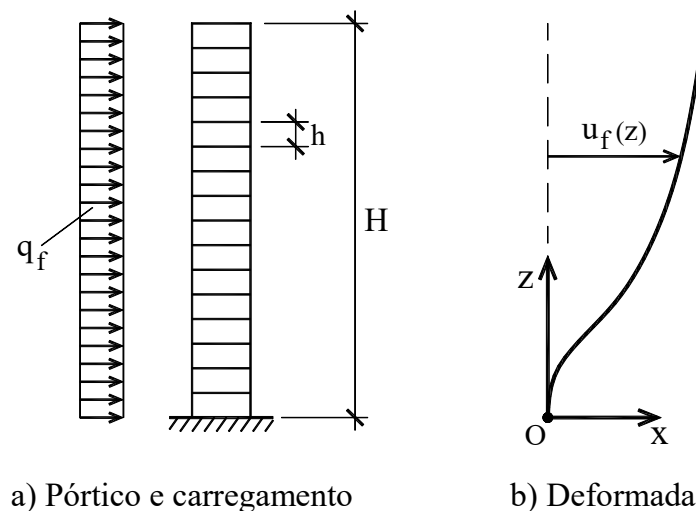


Figura 2.2

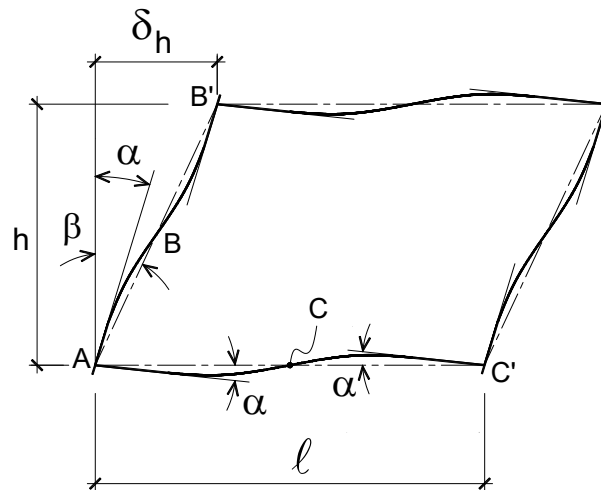
A figura 2.3 a) exibe a configuração deformada do quadro de um pórtico de 2 colunas sob a hipótese de que os pontos de inflexão se acham na metade das vigas por simetria e na metade das colunas por se considerar que as rotações de nós consecutivos das colunas são muito próximas. Assim, o equilíbrio de momentos no nó A, como exibe a Figura 2.b), implica em:

$$M_{AB} + M_{AD} = M_{AC} \quad (2.6)$$

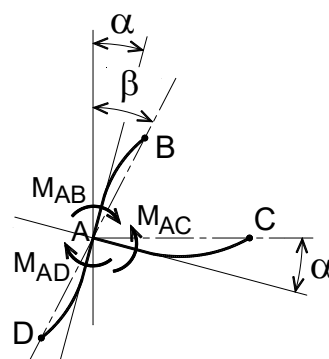
resultando:

$$\alpha = \frac{2k_c}{2k_c + k_v} \beta \cong \frac{2k_c}{2k_c + k_v} \frac{du_f(z)}{dz} \quad (2.7)$$

onde  $k_c = EI_c/h$  denota um parâmetro de rigidez da coluna e  $k_v = EI_v/\ell$  o parâmetro de rigidez da viga, uma vez que:



a) Storey deflection



b) Equilibrium of moments

Figura 2.3

$$\begin{aligned}
M_{AB} &= 6k_c (\beta - \alpha) \\
M_{AD} &= 6k_c (\beta - \alpha) \\
M_{AC} &= 6k_v (\alpha) \\
\beta &= \frac{\delta}{h} \cong \frac{du_f(z)}{dz}
\end{aligned} \tag{2.8}$$

sendo que a última de (2.8) consiste na consideração aproximadora básica da Técnica do Meio Contínuo como originalmente proposta por Chitty (Chitty, L, "On the Cantilever composed of a series of parallel beams interconnected by cross members" Philosophical Magazine, V38, 1947). Assim sendo, a força cortante na coluna se escreve:

$$V_c = \frac{M_{AB}}{h/2} = \frac{6k_c}{h} \frac{2k_v}{2k_c + k_v} \frac{du_f(z)}{dz} \tag{2.9}$$

ou ainda:

$$V_f(z) = V_{c1}(z) + V_{c2}(z) = s_f \frac{du_f(z)}{dz} \tag{2.10}$$

onde  $V_f$  vem a ser a cortante no pórtico, com:

$$s_f = \frac{12k_c}{h} \frac{2k_v}{2k_c + K_v} \tag{2.11}$$

que consiste na chamada rigidez do pórtico, que relaciona a inclinação (rotação) do conjunto com a força cortante, no caso de colunas iguais.

Uma correção consistente foi sugerida pelo autor Laier (Laier J.E. An Improved Continuous Medium Technique for Structural Frame Analysis, *The Structural Design of Tall and Special Buildings*, 17, 25-38, 2008) para o expresso em (2.10), tendo-se em conta a contribuição da flexão geral da coluna, ou seja:

$$V_f(z) = s_f \frac{du_f(z)}{dz} - (EI_1 + EI_2) \frac{2k_c}{2k_c + k_v} \frac{d^2\alpha}{dz^2} = s_f \frac{du_f(z)}{dz} - j_f \frac{d^3u_f(z)}{dz^3} \tag{2.12}$$

onde  $EI_1$  e  $EI_2$  são o produto de inércia das colunas 1 e 2 respectivamente, e

$$j_f = KR \tag{2.13}$$

vem a ser o produto de inércia das duas colunas do pórtico, com:

$$\begin{aligned}
K &= EI_1 + EI_2 \\
R &= \frac{2k_c}{2k_c + k_v}
\end{aligned} \tag{2.14}$$

cumprindo-se assinalar que essa contribuição foi adotada de forma não consistente por Murashev, Sigalov e Baikov (Murashev V.; Sigalov E. and Baikov V. *Design of Reinforced Concrete Structures*, Mir: Publisher, Moscow, 1972), não



se considerando a redução da inércia segundo (2.13), adotando-se unitário o parâmetro  $R$ .

O expresso em (2.11) e (2.13) pode ser estendido para considerar pórticos com mais de duas prumadas de pilar, ou seja:

$$s_f = \frac{12}{h} \sum_{na} \left[ k_c \frac{\sum_v k_v}{\sum_b k_b} \right] \quad (2.15)$$

$$j_f = \sum_{na} EI_c \frac{\sum_c k_c}{\sum_b k_b}$$

onde  $na$  é o número de nós no andas,  $b$  e  $c$  são o número de vigas e o número de colunas em cada nó ( $v=1, c=2$  ou  $v=c=2$ ), respectivamente, e  $b$  é o número de barras (vigas e colunas) que concorrem em cada nó ( $b=3,4$ ). Vale notar que, para os nós centrais a figura 2.3b) passa a contemplar a viga também incidindo do lado esquerdo do nó.

A integração de (2.12) é dada por:

$$u_f(z) = \frac{q_f}{j_f r^4} \left[ A_1 e^{rz} + A_2 e^{-rz} + r^2 \left( Hz - \frac{z^2}{2} \right) - C \right] \quad (2.16)$$

onde:

$$r = \sqrt{\frac{s_f}{j_f}}$$

$$A_1 = \frac{1 - rHe^{-rH}}{2\text{coth}(rH)}$$

$$A_2 = \frac{1 + rHe^{rH}}{2\text{coth}(rH)}$$

$$C = \frac{1 + rH\text{sech}(rH)}{\text{coth}(rH)}$$
(2.17)

visto que as condições de contorno são similares ao exposto em (2.5), ou seja:

$$u_f(z=0) = 0$$

$$\frac{du_f(z=0)}{dz} = 0$$

$$\frac{d^2u_f(z=H)}{dz^2} = 0$$
(2.18)

com a primeira de (2.18) decorrente do fato de ser nulo o deslocamento do pórtico na base, a segunda de (2.18) do fato de ser nula a rotação do pórtico na

base, que é uma imposição da flexão global das colunas, o mesmo valendo para a terceira de (2.18), resultante da nulidade do momento fletor no topo.

### 2.3-Exemplo de Aplicação

No sentido de se aquilatar a contribuição da flexão global das colunas no comportamento do pórtico, considere-se um pórtico de 10 andares com pé direito de 3m tendo-se os seguintes parâmetros:

$$E = 289.56 \text{ kN/cm}^2$$

$$s_f = \frac{12}{12.7} 25.06 \frac{2 \times 19.31}{2 \times 25.06 + 19.31} = 13.17 \text{ kN}$$

$$j_f = 2 \times 12.7 \times 25.06 \frac{19.31}{2 \times 25.06 + 19.31} = 459.49 \text{ kNcm}^2$$

cujos resultados do deslocamento para  $q_f = 0.35 \text{ N/cm}$  são arrolados na Tabela 1 e correspondentes gráficos na Figura 2.4 comparando-se com os resultados sem considerar a flexão global das colunas, bem como os alcançados empregando-se o pacote ANSYS (Ansys Inc., Canonsburg, Pensilvania, USA), ficando-se evidente que a consideração da flexão global das colunas é significativa levando a resultados com magnitudes próximas das dos obtidos com o pacote Ansys.

### 2.4-Porticos Considerando-se Colunas Axialmente Deformáveis

A Figura 2.5 a) exibe a deformada genérica do quadro de um pórtico tendo-se em conta a deformação axial das colunas, e a Figura 2.5 b) a configuração de equilíbrio de momentos no nó da esquerda.

Table 1 Deslocamentos

$\eta$	Flexão Global das Colunas cm.	Negligenciando a Flexão Global das Colunas (cm.)	Ansys cm
0	0.0000	0.0000	0.0000
0.1	0.0231	0.0407	0.02257
0.2	0.0575	0.0771	0.05555
0.3	0.0894	0.1093	0.08665
0.4	0.1172	0.1372	0.11137
0.5	0.1408	0.1607	0.1366
0.6	0.1601	0.1800	0.1555
0.7	0.1751	0.1950	0.1700
0.8	0.1858	0.2057	0.1804
0.9	0.1923	0.2122	0.1867
1.0	0.1953	0.2143	0.1894

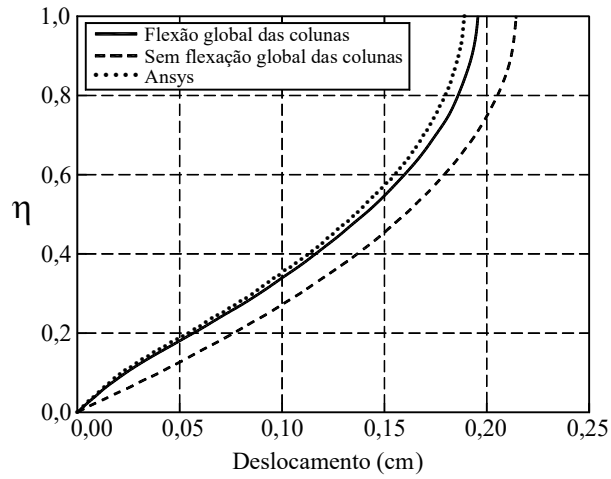


Figura 2.4

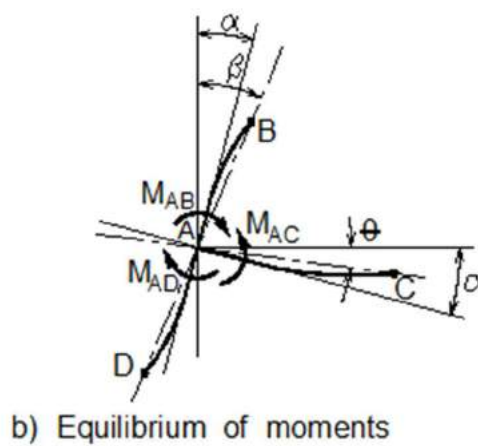
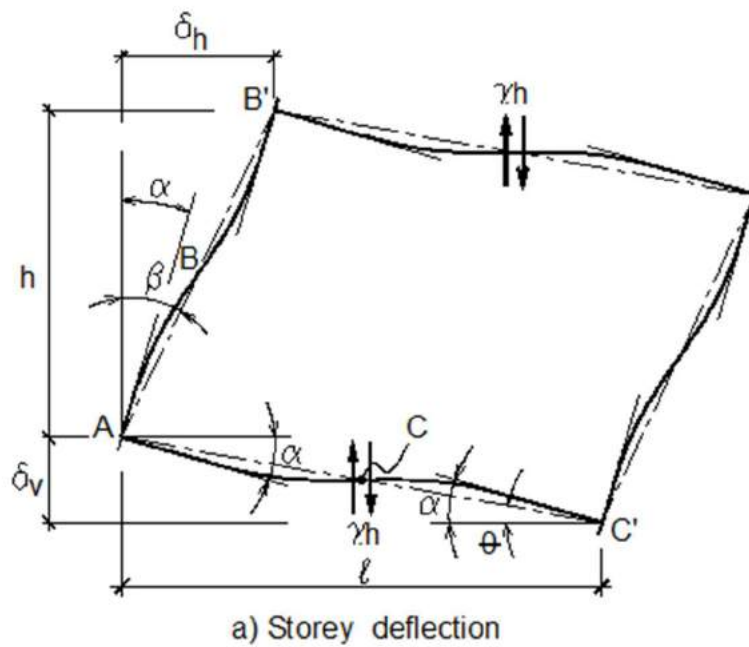


Figura 2.5

O movimento relativo horizontal do andar é designado por  $\delta_h$  e o movimento relativo dos nós do andar por  $\delta_v$ ,  $\alpha$  é a rotação angular dos nós do andar, o produto  $\gamma h$  representa a força cortante na viga, sendo  $\gamma$  a força axial distribuída equivalente. Assumindo-se que os pontos de inflexão se localizam no meio do vão da viga e na meia altura das colunas tem-se:

$$\begin{aligned} M_{AB} &= 6k_c (\beta - \alpha) \\ M_{AD} &= 6k_c (\beta - \alpha) \\ M_{AC} &= 6k_v (\alpha - \theta) \end{aligned} \quad (2.19)$$

onde  $\beta = \delta_h/h$  e  $\theta = \delta_v/\ell$ . Assim sendo, o equilíbrio de momentos, como mostra a Figura 2.5 b), resulta:

$$\alpha = \frac{2k_c}{2k_c + k_v} \frac{du_f(z)}{dz} + \frac{k_v}{2k_c + k_v} \theta \quad (2.20)$$

onde  $\beta$  já se acha, como já exposto, representado pela primeira derivada da deformada do pórtico.

Tendo-se em conta a terceira de (2.19) a força cortante na viga se expressa:

$$\gamma h = \frac{2M_{AC}}{\ell} = \frac{12k_v}{\ell} \frac{2k_c}{2k_c + k_v} \left( \frac{du_f(z)}{dz} - \theta \right) \quad (2.21)$$

bem como a relação de compatibilidade axial tem a seguinte redação:

$$\theta(z) = \frac{2}{\ell} \int_0^z \frac{N}{ES} \quad (2.22)$$

ou ainda:

$$\frac{d\theta(z)}{dz} = \frac{2N}{\ell ES} = \frac{2(M_f - (M_1 + M_2))}{\ell^2 ES} \quad (2.23)$$

onde  $N$  é a força normal nas colunas (tração na coluna da esquerda e de compressão na coluna da direita),  $S$  a área da seção transversal das colunas,  $M_f$  o momento fletor no pórtico como um todo,  $M_1$  e  $M_2$  os momentos fletores nas colunas da direita e esquerda, respectivamente.

O equilíbrio de forças no sentido vertical, como ilustra-se na Figura 2.6, implica em:

$$\frac{dN}{dz} + \gamma = 0 \quad (2.24)$$

ou ainda

$$N(z) = \int_z^H \gamma dz \quad (2.25)$$

implicando-se força normal nula no topo.

Por outro lado, decorre da derivação de (2.23):

$$\frac{dM_f}{dz} = \frac{d(M_1 + M_2 - N\ell)}{dz} = V_f(z) \quad (2.26)$$

ou ainda, tendo-se em conta (2.24):

$$\frac{d(M_1 + M_2)}{dz} + V_f + \gamma\ell = 0 \quad (2.27)$$

cuja derivação permite redigir:

$$\frac{d^2(M_1 + M_2)}{dz^2} - q_f - s_f \frac{d^2 u_f(z)}{dz^2} + \frac{s_f}{K_0} (M_f - (M_1 + M_2)) = 0 \quad (2.28)$$

onde:

$$\begin{aligned} K_0 &= EI_0 \\ I_0 &= S \frac{\ell^2}{2} \\ s_f &= \frac{12k_c}{h} \frac{2k_v}{2k_c + k_v} \end{aligned} \quad (2.29)$$

com  $K_0$  representando o produto de inércia do pórtico como um todo e  $s_f$  a rigidez do pórtico à força cortante. O expresso em (2.28) decorre de se ter em conta (2.21), (2.23) e (2.24).

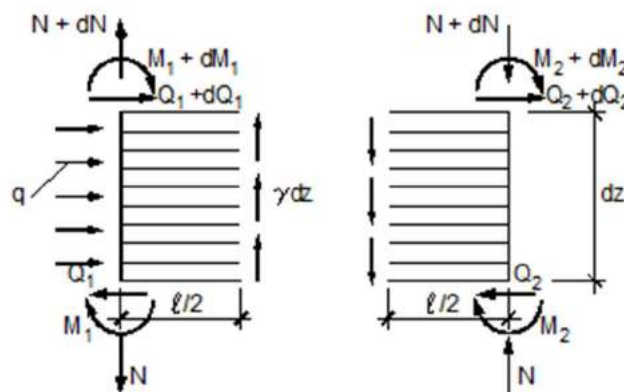


Figura 2.6

Por outro lado, tendo-se em conta (2.20), a flexão global das colunas permite redigir:

$$M_1 + M_2 = K \frac{d\alpha}{dz} = K \left( R_1 \frac{d^2 u_f}{dz^2} + (1 - R_1) \frac{d\theta}{dz} \right) \quad (2.30)$$

onde:

$$\begin{aligned} K &= EI_1 + EI_2 \\ R_1 &= \frac{2k_c}{2k_c + k_v} \end{aligned} \quad (2.31)$$

onde  $EI_1$  e  $EI_2$  são os produtos de inércia da coluna da esquerda e direita, respectivamente., valendo-se ressaltar que o modelo proposto por Murashev negligencia a redução da inércia das colunas, adotando-se  $R_1$  unitário.

Tendo-se em conta, finalmente, o expresso em (2.23) e (2.30), a equação de equilíbrio (2.28) ganha a redação:

$$j_f \frac{d^4 u_f(z)}{dz^4} - s_f \mu_f^2 \frac{d^2 u_f(z)}{dz^2} + \frac{s_f}{K_0} M_f(z) - q_f = 0 \quad (2.32)$$

onde:

$$\begin{aligned} j_f &= KR_1 \\ \mu_f &= \sqrt{\frac{K_0 + K}{K_0}} \end{aligned} \quad (2.33)$$

cuja integração pode ser levada a efeito, visto que o momento no pórtico como um todo expresso por  $M_f(z) = q_f (H - z)^2 / 2$  e a carga distribuída horizontal  $q_f$  são funções conhecidas.

As condições de contorno geométricas e mecânicas são dadas por:

$$\begin{aligned}
u_f(z=0) &= 0 \\
\frac{du_f(z=0)}{dz} &= 0 \\
(2.22) \rightarrow \theta(z=0) &= 0 \\
(2.25) \rightarrow N(z=H) &= 0 \\
(2.23)e(2.25) \rightarrow \frac{d\theta(z=H)}{dz} &= 0 \\
(2.21), (2.22)e(2.24) \rightarrow \frac{dN(z=0)}{dz} &= 0 \\
M_f(z=H) &= 0 \\
V_f(z=H) &= 0
\end{aligned} \tag{2.34}$$

resultando-se nas condições de contorno de (2.32), ou seja:

$$\begin{aligned}
u_f(z=0) &= 0 \\
\frac{du_f(z=0)}{dz} &= 0 \\
\frac{d^2u_f(z=H)}{dz^2} &= 0 \\
\frac{d^3u_f(z=0)}{dz^3} &= \frac{q_f H}{j_f}
\end{aligned} \tag{2.35}$$

sendo que a terceira de (2.35) resulta do fato de a normal ser nula no topo e a quarta do fato de a derivada da força normal na base ser nula (vide (2.21) e (2.24)). Assim, com essas condições de contorno, a integração de (2.32) resulta:

$$u(z) = \frac{q}{r^4 j_f} \left[ \begin{array}{l} A_1 e^{rz} + A_2 e^{-rz} + z^2 \left( -\frac{r^2}{2} + \frac{\lambda_0}{2} \left( \frac{r^2}{2} + \frac{1}{H^2} \right) \right) - \frac{\lambda_0 r^2 z^3}{6H} + \frac{\lambda_0 r^2 z^4}{24H^2} \\ (-A_1 + A_2) r z - A_1 - A_2 \end{array} \right] \tag{2.36}$$

onde:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{1}{2 \cosh(rH)} \left[ 1 - \frac{\lambda_0}{r^2 H^2} + \left( -rH + \frac{\lambda_0}{rH} \right) e^{-rH} \right] \\
A_2 &= \frac{1}{2 \cosh(rH)} \left[ 1 - \frac{\lambda_0}{r^2 H^2} + \left( rH - \frac{\lambda_0}{rH} \right) e^{rH} \right] \\
r &= \sqrt{\frac{s_f \mu_f^2}{j_f}} \\
\lambda_0 &= \frac{s_f H^2}{K_0}
\end{aligned} \tag{2.37}$$

valendo-se assinalar que, embora as incógnitas são duas ( $u_f(z)$  e  $\theta_f(z)$ ) nesse caso, foi possível desacoplar as equações e simplificar a solução. Além disso cabe chamar a atenção para o fato de que a equação de equilíbrio (2.32), considerando-se  $\mu = 1$ , ou seja  $K_0$  tendendo-se ao infinito, resulta na derivada da equação (2.12), que consiste na equação de equilíbrio do pórtico com colunas indeformáveis axialmente. Em outras palavras, o expresso em (2.36) com  $\lambda_0 = 0$  é igual ao expresso em (2.16).

No caso de pórticos com mais de duas colunas, a avaliação do parâmetro  $K_0$ , tendo-se em conta o fato de que, na coluna interna, a força cortante da viga da esquerda é oposta à da viga da direita, torna-se a normal nessa coluna bem menor que no caso das colunas externas. Esse fato justifica, por aproximação, considerar-se apenas a contribuição da deformação axial das colunas externas na avaliação do parâmetro em questão. Uma expressão para essa avaliação pode ser:

$$K_0 = E \frac{S_1 S_2 L^2}{1 + 2 \frac{S_1 S_2}{S_1^2 + S_2^2}} \quad (2.38)$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade das colunas,  $S_1$  e  $S_2$  são as áreas da seção transversal das colunas externas e  $L$  o vão total do pórtico. Essa expressão decorre da consideração de uma seção discreta com a consideração apenas das áreas das seções das colunas externas.

A associação plana de dois pórticos com deformação axial envolve quatro equações, ou seja:

$$\begin{aligned} j_{f1} \frac{d^4 u(z)}{dz^4} - s_{f1} \mu_{f1}^2 \frac{d^2 u(z)}{dz^2} + \frac{s_{f1}}{K_{0f1}} M_{f1} - q_{f1} &= 0 \\ j_{f2} \frac{d^4 u(z)}{dz^4} - s_{f2} \mu_{f2}^2 \frac{d^2 u(z)}{dz^2} + \frac{s_{f2}}{K_{0f2}} M_{f2} - q_{f2} &= 0 \\ M_{f1} + M_{f2} &= M \\ q_{f1} + q_{f2} &= q \end{aligned} \quad (2.39)$$

onde o índice  $f_i$  refere-se a parâmetros do pórtico  $i$ ,  $M$  e  $q$  são o momento fletor e a carga distribuída uniforme aplicada no conjunto, respectivamente, e  $u(z)$  a deformada comum aos dois pórticos.

A integração de (2.39) resulta em expressão semelhante a (2.37) no caso:

$$\frac{s_{f1}}{K_{0f1}} = \frac{s_{f2}}{K_{0f2}} \quad (2.40)$$



uma vez que a primeira de (2.39) somada com a segunda de (2.39) resulta numa equação do tipo (2.32). Caso contrário, o equilíbrio do conjunto ganha, depois de uma manipulação algébrica de certa monta, a seguinte escrita:

$$b_1 \frac{d^6 u(z)}{dz^6} - b_2 \frac{d^5 u(z)}{dz^5} + b_3 \frac{d^2 u(z)}{dz^2} - b_4 M + b_5 q - \frac{d^2 q}{dz^2} = 0 \quad (2.41)$$

onde:

$$\begin{aligned} b_1 &= j_{f1} + j_{f2} \\ b_2 &= \psi_1 s_{f1} + \psi_2 s_{f2} \\ b_4 &= \frac{s_{f1} s_{f2}}{K_{0f1} K_{0f2}} \\ b_3 &= b_4 (K_{0f1} + K_{0f2}) \\ b_5 &= \frac{s_{f1}}{K_{0f1}} + \frac{s_{f2}}{K_{0f2}} \\ \psi_1 &= 1 + \frac{b_1}{K_{0f1}} \\ \psi_2 &= 1 + \frac{b_1}{K_{0f2}} \end{aligned} \quad (2.42)$$

com as condições de contorno:

$$\begin{aligned} u(z=0) &= 0 \\ \frac{du(z=0)}{dz} &= 0 \\ \frac{d^3 u(z=0)}{dz^3} &= -\frac{qH}{j_{f1} + j_{f2}} \\ (j_{f1} + j_{f2}) \frac{d^5 u(z=0)}{dz^5} - (s_{f1} + s_{f2}) \frac{d^3 u(z=0)}{dz^3} &= 0 \\ \frac{d^2 u(z=H)}{dz^2} &= 0 \\ \frac{d^4 u(z=H)}{dz^4} &= \frac{q}{j_{f1} + j_{f2}} \end{aligned} \quad (2.43)$$

cuja integração resulta:

$$u(z) = \frac{qH^4}{b_1} \left[ \begin{array}{l} \frac{A_1}{\lambda_1^2} (1 - \text{coth}(\lambda_1 \eta)) + \frac{A_3}{\lambda_2^2} (1 - \text{coth}(\lambda_2 \eta)) + \\ \frac{A_2}{\lambda_1^2} (\pi \lambda_1 - \text{sech}(\lambda_1 \eta)) + \frac{A_4}{\lambda_2^2} (\eta \lambda_2 - \text{sech}(\lambda_2 \eta)) + \\ \frac{t_1}{2} \left( \frac{\eta^2}{2} - \frac{\eta^3}{3} + \frac{\eta^4}{12} \right) - \frac{t_2 \eta^2}{2} \end{array} \right] \quad (2.44)$$

onde:

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{\mu_2 \text{sech}(\lambda_1) - \lambda_1 (t_1 + t_2 \lambda_2^2 - 1)}{\omega \lambda_1 \text{coth}(\lambda_1)} \\ A_2 &= \frac{\mu_2}{\mu \lambda_1} \\ A_3 &= -\frac{\mu_1 \text{sech}(\lambda_2) - \lambda_2 (t_1 + t_2 \lambda_1^2 - 1)}{\omega \lambda_2 \text{coth}(\lambda_2)} \\ A_4 &= -\frac{\mu_1}{\mu \lambda_2} \\ \mu &= \lambda_1^2 - \lambda_2^2 \\ \lambda &= H \sqrt{\frac{s_{f1} + s_{f2}}{b_1}} \\ \mu_1 &= \lambda^2 - \lambda_1^2 (1 - t_1) \\ \mu_2 &= \lambda^2 - \lambda_2^2 (1 - t_1) \\ \eta &= \frac{z}{H} \end{aligned} \quad (2.45)$$

sendo:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \alpha_1 H \\ \lambda_2 &= \alpha_2 H \\ \alpha_{1,2} &= \sqrt{a \pm \sqrt{a^2 - b}} \\ a^2 &= \frac{b_2}{2b_1} \\ b^4 &= \frac{b_3}{b_1} \\ t_1 &= \frac{b_4}{b^4} \\ t_2 &= \frac{b_5 - 2a^2 t_1}{H^2 b^4} \end{aligned} \quad (2.46)$$

Como visto, a associação de pórticos com colunas deformáveis aumenta a complexidade da solução, deixando-se de ser algo apropriado para cálculo manual. Um procedimento aproximado visando a não complexidade consiste em se considerar o parâmetro médio como a constante dos dois painéis, resultando-se, pois:

$$\frac{s_{f1}}{K_{0f1}} M_{f1} + \frac{s_{f2}}{K_{0f2}} M_{f2} = \frac{1}{2} \left( \frac{s_{f1}}{K_{0f1}} + \frac{s_{f2}}{K_{0f2}} \right) (M) = \frac{\bar{s}_f}{\bar{K}_0} M \quad (2.47)$$

que consiste na superposição das duas primeiras de (2.39), cuja solução passa a ser expressa novamente segundo (2.36).

No sentido se se justificar o procedimento expresso em (2.47), considere-se o caso em que  $q = 1 \text{ KN / cm}$  com:

$$\frac{s_{f2}}{K_{0f2}} = \frac{s_{f1}}{K_{0f1}} \rightarrow \frac{1}{2} \left( \frac{s_{f1}}{K_{0f1}} + 2 \frac{s_{f1}}{K_{0f1}} \right) = 1.5 \frac{s_{f1}}{K_{0f1}} \quad (2.48)$$

cujos resultados da deformada em centímetros estão lançados na Tabela 2 e nos gráficos da Figura 2.7, valendo-se notar que, agora os parâmetros do conjunto são dados por:

$$r = \sqrt{\frac{s_{f1} \mu_{f1}^2 + s_{f2} \mu_{f2}^2}{j_{f1} + j_{f2}}} \quad (2.49)$$

$$\lambda_0 = \frac{\bar{s}_f H^2}{\bar{K}_0}$$

Tabela 2

$\eta$	Solução Exata: eq. (2.44)	Aproximação: eq. (2.47)
0	0.0	0.0
0.1	24.58	25.24
0.2	59.59	61.28
0.3	92.88	95.42
0.4	123.34	126.49
0.5	150.63	154.42
0.6	174.53	178.29
0.7	194.84	198.63
0.8	211.42	215.07
0.9	224.21	227.56
1.0	233.57	236.50

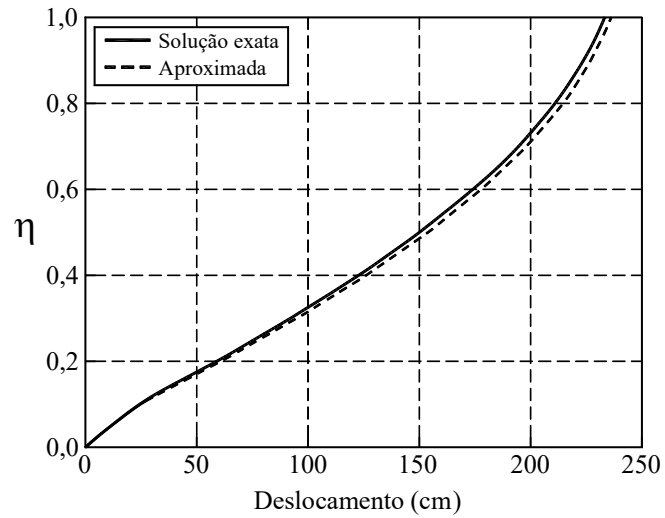


Figura 2.7

Um exame dos resultados encontrados deixa claro que as discrepâncias entre a solução aproximada e a exata expressa por (2.43) são insignificantes, mesmo considerando-se painéis com grande diferença de rigidez.

### CAPÍTULO III

#### EFEITOS DE SEGUNDA ORDEM EM PAINÉIS DE CONTRAVENTAMENTO

##### 3.1- Efeito de Segunda Ordem Padrão

A figura 3.1 exhibe o caso clássico para explicitar o efeito de segunda ordem, que consiste numa barra com desalinhamento senoidal sob carga de compressão  $N$ , cujo equilíbrio se expressa:

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} + P(y(x) + v_0(x)) = 0 \quad (3.1)$$

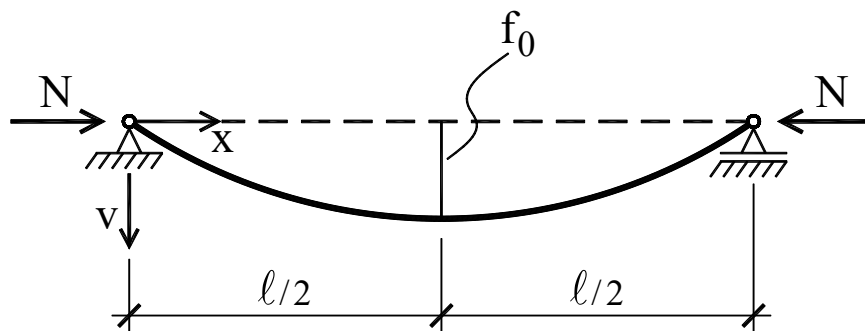
onde  $EI$  é o produto de inércia da barra,

$$v_0(x) = f_0 \text{sen}(\pi x / \ell) \quad (3.2)$$

o desalinhamento inicial senoidal com  $f_0$  a flecha e  $\ell$  o vão, e:

$$y(x) = v(x) - v_0(x) \quad (3.3)$$

sendo  $y(x)$  a deformada elástica acrescida à deformada inicial do desalinhamento  $v_0(x)$ , e  $v(x)$  a deformada final de segunda ordem.



**Figura 3.1**

A integração de (3.1), tendo-se em conta as condições de contorno:

$$\begin{aligned} y(x=0) &= 0 \\ y(x=\ell) &= 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

resulta:

$$y(x) = \frac{N}{N_c - N} f_0 \text{sen}(\pi x / \ell) \quad (3.5)$$

ou ainda:

$$v(x) = \frac{1}{1 - N/N_c} f_0 \text{sen}(\pi x / \ell) \quad (3.6)$$

onde:

$$N_c = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} \quad (3.7)$$

vem a ser a carga crítica de flambagem da barra em apreço, ficando-se claro que o fator de majoração da deformada inicial:

$$\gamma_s = \frac{1}{1 - N/N_c} \quad (3.8)$$

permite avaliar a deformada final de segunda ordem. Vale ressaltar que esse fator de majoração é tomado por base em normas internacionais, visto que, para outras vinculações da barra a carga crítica é dada por expressões envolvendo outros fatores, mas a majoração correspondente é praticamente de mesma magnitude. Cumpre registrar que esse fator de majoração se aplica também à deformada provocada por carregamento transversal na barra, como as forças do vento ou de terremoto, por exemplo.

### 3.2- Deformação Lenta

O clássico modelo constitutivo de deformação lenta de Dishinger se expressa:

$$\frac{d\varepsilon(t, \phi)}{dt} = \frac{1}{E} \left( \frac{d\sigma(t, \phi)}{dt} + \sigma(t, \phi) \frac{d\phi}{dt} \right) \quad (3.9)$$

onde  $\phi = \phi(t)$  é a função de fluência de Dishinger,  $\varepsilon(t, \phi)$  a deformação e  $\sigma(t, \phi)$  a tensão.

Por outro lado, a teoria técnica da flexão prescreve:

$$\varepsilon(x, t, \phi) = - \frac{d^2 v(x, t, \phi)}{dx^2} y \quad (3.10)$$

onde  $y$  é ordenada do ponto em consideração na seção transversal da barra, e, com isso, (3.9) passa a ter nesse caso a redação:

$$\frac{d}{dt} \left( - \frac{d^2 v(x, t, \phi)}{dx^2} \right) = \frac{1}{E} \left( \frac{1}{y} \frac{d\sigma(x, t, \phi)}{dt} + \frac{\sigma(x, t, \phi)}{y} \frac{d\phi}{dt} \right) \quad (3.11)$$

ou ainda, multiplicando-se membro a membro (3.11) por  $y^2$  e integrando-se na seção da barra tendo-se em conta:

$$M(x, t, \phi) = \int_s \sigma(x, t, \phi) y dS \quad (3.12)$$

tem-se:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{d^2 v(x, t, \phi)}{dx^2} \right) = -\frac{1}{EI} \left( \frac{dM(x, t, \phi)}{dt} + M(x, t, \phi) \frac{d\phi}{dt} \right) \quad (3.13)$$

permitindo-se assim eliminar a variável tempo explícita multiplicando-se ambos os membros de (3.13) por  $dt/d\phi$ , ou seja:

$$\frac{d}{d\phi} \left( \frac{d^2 v(x, t, \phi)}{dx^2} + \frac{M(x, t, \phi)}{EI} \right) = -\frac{M(x, t, \phi)}{EI} \quad (3.14)$$

que consiste numa equação diferencial envolvendo-se as variáveis espaço e função de fluência.

Considerando-se agora o problema padrão do item anterior tem-se:

$$\frac{d}{d\phi} \left( \frac{d^2 v(x, t, \phi)}{dx^2} + \frac{Nv(x, t, \phi)}{EI} \right) = -\frac{Nv(x, t, \phi)}{EI} \quad (3.15)$$

sendo  $v(x, t, \phi)$  a evolução da deformada de segunda ordem, supondo-se que é a partir dela que a deformação lenta vai se processar.

A integração de (3.15) por separação de variáveis, ou seja:

$$v(x, t, \phi) = u(x, t)w(\phi) \quad (3.16)$$

resulta uma nova redação de (3.15), ou seja:

$$\frac{\frac{d^2 u(x, t)}{dx^2} + \frac{Nu(x, t)}{EI}}{\frac{Nu(x, t)}{EI}} = -\frac{w(\phi)}{\left( \frac{dw(\phi)}{d\phi} \right)} = -\frac{1}{m} \quad (3.17)$$

onde o fator  $-1/m$  vem a ser a constante de separação, resultando-se nas equações desacopladas:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u(x, t)}{dx^2} + \frac{N}{EI} \left( 1 + \frac{1}{m} \right) u(x, t) &= 0 \\ \frac{dw(\phi)}{d\phi} - mw(\phi) &= 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

sendo a integração da segunda de (3.18) expressa por:

$$w(\phi) = e^{m\phi} \quad (3.19)$$

visto que, para  $\phi(t=0) = 0$ , deve-se ter  $w(\phi=0) = 1$ , uma vez que nesse caso a deformada vem a ser a deformada de segunda ordem (vide (3.6) e (3.16)). Por outro lado, para  $\phi(t=0) = 0$  a deformada  $u(x, t=0)$  coincide com a deformada de segunda ordem (3.16), e assim sendo, a primeira de (3.18) permite redigir:

$$-\frac{\pi^2}{\ell^2} + \frac{N}{EI} \left(1 + \frac{1}{m}\right) = 0 \quad (3.20)$$

ou seja:

$$m = \frac{1}{(N_c/N) - 1} \quad (3.21)$$

resultando-se:

$$v(x, t, \phi) = v(x) e^{\frac{\phi}{(N_c/N) - 1}} \quad (3.22)$$

sendo o fator de majoração da deformação lenta:

$$\gamma_\ell = e^{\frac{\phi}{(N_c/N) - 1}} \quad (3.23)$$

prescrito em normas internacionais. O valor máximo alcançado pela função  $\phi(t)$  pode variar de dois a três, ou seja, a deformação lenta pode chegar ao dobro ou o triplo da deformação inicial. Além disso, vale chamar a atenção para o fato de que esse fator de majoração se aplica apenas nos casos de solicitação permanente, como solicitação por peso próprio e cargas de ocupação. Como as forças do vento e de terremoto têm curta duração a deformação lenta não é mobilizada.

A deformada final tendo-se em conta os efeitos de segunda ordem e de deformação lenta se expressa:

$$v(x, \phi) = \gamma_s \gamma_\ell v_0(x) = \frac{e^{\frac{\phi}{(N_c/N) - 1}}}{1 - (N/N_c)} v_0(x) \quad (3.24)$$

sendo  $v_0(x)$  o desalinhamento inicial.

Com visto, os efeitos de segunda ordem e de deformação lenta dependem sobremaneira da magnitude da carga crítica da barra; por essa razão a atenção agora vai estar voltada para a avaliação da carga crítica de flambagem dos painéis.



### 3.3- Carga Crítica do Painel Parede e Coeficiente de Instabilidade de Beck

A Figura 3.2 exibe o painel parede em situação desalinhada e sob efeito de carga axial distribuída, cujo equilíbrio de forças horizontais se expressa:

$$EI \frac{d^3 u(z)}{dz^3} + \rho(H-z) \frac{du(z)}{dz} = 0 \quad (3.25)$$

ou ainda:

$$\frac{d^3 u(\eta)}{d\eta^3} + \frac{\rho H^3}{EI} (1-\eta) \frac{du(\eta)}{d\eta} = 0 \quad (3.26)$$

onde  $\rho$  é a carga axial uniformemente distribuída,  $\eta = z/H$ , que consiste numa equação diferencial com condições de contorno dadas por:

$$\begin{aligned} u(\eta = 0) &= 0 \\ \frac{du(\eta = 0)}{d\eta} &= 0 \\ \frac{d^2 u(\eta = H)}{d\eta^2} &= 0 \end{aligned} \quad (3.27)$$

sendo as duas primeiras de (3.27) decorrentes da vinculação da parede na base, e a terceira do fato de se ter momento fletor nulo no topo. Valendo-se notar que, na posição desalinhada, a força cortante provocada pela carga axial vem a ser o produto da carga axial pela inclinação da deformada, algo como a derivação de (3.1). O expresso em (3.26) consiste numa variante da clássica equação de Bessel, cujo autovalor, no caso em apreço, é dado por:

$$\frac{\rho H^3}{EI} = 7.837 \quad (3.28)$$

correspondendo-se a carga crítica de flambagem:

$$N_c = \rho H = \frac{7.837EI}{H^2} \quad (3.29)$$

onde  $N_c$  vem a ser a força normal na base da parede.

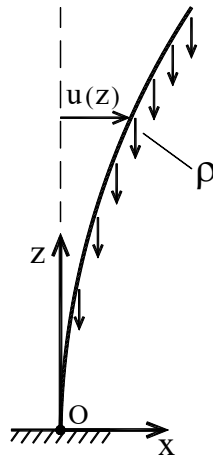


Figura 3.2

O expresso em (3.29) permite definir o parâmetro crítico de Beck como sendo:

$$\alpha_c = H \sqrt{\frac{N_c}{EI}} = \sqrt{7.837} = 2.80 \quad (3.30)$$

e no caso do estado limite de utilização, por exemplo, expresso por:

$$\alpha_k = H \sqrt{\frac{N_k}{(EI)_k}} \quad (3.31)$$

onde o índice k refere-se ao valor característico, indicando-se, por exemplo, que o valor  $\alpha_k = 0.6$  significa  $N_k / N_c = 0.0459$ , correspondendo-se a  $\gamma_s = 1.048$ ; ou seja, o efeito de segunda ordem pode ser então negligenciado segundo as normas. Por outro lado, para esse mesmo valor de  $\alpha_k$  o fator de majoração da deformação lenta supondo-se valer 3 vezes a deformação elástica ( $\phi = 3$ ) tem-se:

$$\gamma_\ell = e^{\frac{3}{(N_c/N_k)-1}} = 1.15$$

levando-se a um fator de majoração total como expresso em (3.24) com magnitude de  $\gamma_s \gamma_\ell = 1.21$ ; ou seja, o efeito da deformação lenta aumenta significativamente o desalinhamento final.

### 3.4- Primeiro Exemplo de Aplicação

Considere-se um painel parede analisado por França (França, R.L.S. 'Exemplo de Cálculo do Esforço de Segunda Ordem Global em Edifício de Concreto Armado' Colóquio Anual sobre Estabilidade Global de Estruturas de Concreto Armado, IBRACON, Julho/1985), com altura de 37.7 m, inércia efetiva de  $0.933 \text{ m}^4$ , já considerando a redução padrão de 20% (fator=0.8) provocada pela fissuração (no caso de viga 60%, fator=0.4), módulo elasticidade de

$2.77 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$ , peso total de  $4.734 \times 10^4 \text{ kN}$ , carga horizontal distribuída valendo  $q = 37.96 \text{ kN/m}$  e máximo valor da função de fluência 2.5.

Com esses dados, tem-se:

$$u(z) = \frac{qH^4}{24EI} (\eta^4 - 4\eta^3 + 6\eta^2) = 0.1237(\eta^4 - 4\eta^3 + 6\eta^2)$$

$$N_c = \frac{7.837EI}{H^2} = 1.425 \times 10^5 \text{ kN}$$

$$\gamma_s = \frac{1}{1 - 4.734/14.250} = 1.497$$

$$\gamma_\ell = e^{\frac{2.5}{(14.250/4.734)^{-1}}} = 1.24$$

sendo os resultados arrolados na Tabela 3.1.

Tabela 3.1

ANDAR	DEFORMADA 1ª Ordem (m)		DEFORMADA 2ª ordem (m)	
	Tec. Con	França	Tec. Con	França
BASE	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.0042	0.0042	0.0062	0.0061
2	0.0158	0.0260	0.0237	0.0235
3	0.0338	0.0342	0.0507	0.0507
4	0.05699	0.0577	0.0854	0.0863
5	0.0843	0.0855	0.1264	0.1290
6	0.1150	0.1167	0.1725	0.1773
7	0.1482	0.1505	0.2223	0,2300
8	0.1833	0.1863	0.2750	0.2861
9	0.2198	0.2234	0.3297	0.3446
10	0.2571	0.2614	0.3856	0.4047
11	0.2949	0.2999	0.4422	0.4657
12	0.3327	0.3386	0.4991	0.5272
13	0.3708	0.3775	0.5562	0.5888

Em primeiro lugar cabe comentar que França providenciou seus cálculos mediante programa de computador baseado em análise matricial, e mesmo assim, para uma amplificação de segunda ordem algo elevada (estrutura bem flexível), os resultados aproximados propostos são bem próximos dos encontrados por França.

Para esse painel, um desaprumo inicial de 1X200 depois de processada a deformação lenta decorrente da carga axial permanente, o desaprumo passa a valer  $\gamma_s \gamma_\ell / 200 = 1.86 / 200$ .

### 3.5- Carga Crítica do Pórtico e Coeficiente de Instabilidade de Beck

A Figura 3.3a) ilustra um pórtico sob carga axial e a Figura 3.3b) uma deformada típica. O equilíbrio no sentido horizontal do pórtico, supondo-se colunas deformáveis axialmente, se expressa por:

$$j_f \frac{d^5 u_f(z)}{dz^5} - s_f \mu_f^2 \frac{d^3 u_f(z)}{dz^3} - \frac{s_f}{K_0} V_f - \frac{dq_f}{dz} = 0 \quad (3.32)$$

que consiste na derivada do expresso em (2.32), onde agora:

$$\begin{aligned} V_f &= \rho(H-z) \frac{du(z)}{dz} \\ q_f &= \rho \frac{du(z)}{dz} \end{aligned} \quad (3.33)$$

ganhando-se (3.32) uma nova redação, ou seja:

$$u_f^V(z) - \frac{\lambda_f^2}{H^2} u_f^{III}(z) - \frac{\rho}{j_f} \left[ \frac{\lambda_f^2}{H^2} \frac{\mu_f^2 - 1}{\mu_f^2} (H-z) u_f^I(z) + u_f^{II}(z) \right] = 0 \quad (3.34)$$

onde:

$$\begin{aligned} \mu_f &= \sqrt{\frac{K_0 + j_f}{K_0}} \\ \lambda_f &= H \sqrt{\frac{s_f \mu_f^2}{j_f}} \end{aligned} \quad (3.35)$$

ou em termos adimensionais:

$$u_f^V(\eta) - \lambda_f^2 u_f^{III}(\eta) - \frac{\rho H^3}{j_f} \left[ \lambda_f^2 \frac{\mu_f^2 - 1}{\mu_f^2} (1-\eta) u_f^I(\eta) + u_f^{II}(\eta) \right] = 0 \quad (3.36)$$

cujos autovalores  $s = \rho H^3 / 7.837 j_f$  acham-se arrolados na Tabela 3.2 para valores práticos dos parâmetros  $\lambda_f$  e  $1/\mu_f^2$

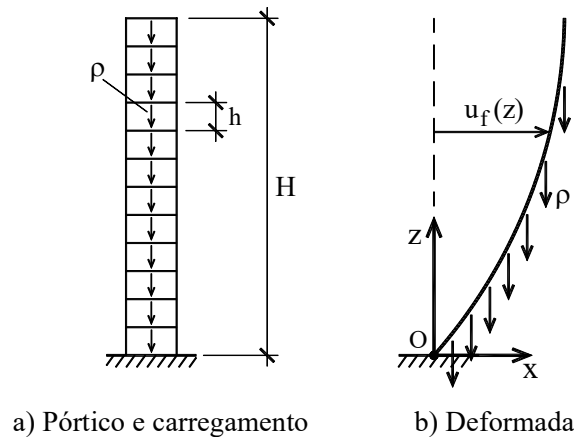


Figura 3.3

A Tabela 3.2 foi originalmente apresentada por Rosman (Rosman R. 'Dynamics and stability of shear wall Building structures', Proc. Inst. Civ. Eng., Pat 2, V1, 411-423, 1973) para parâmetro  $\lambda$  variando de 0 a 9, e estendida até  $\lambda=20$  pelo autor numa publicação interna da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, intitulada "Efeitos de Segunda Ordem em Pórticos de Edifícios Altos, 52 pp., 1989. Trata-se de resultados obtidos de maneira aproximada, mediante formulação via matriz de flexibilidade correspondente à equação (2.32), sendo suficiente a consideração de apenas oito graus de liberdade, pois os resultados para mais que 8 graus de liberdade praticamente retem-se os mesmos valores para a gama de parâmetros considerados. No Apêndice apresenta-se detalhadamente a formulação via matriz de flexibilidade da integração em apreço.

Tabela 3.2

$\lambda_f$	$1/\mu_f^2$						
	0.76	0.80	0.84	0.88	0.92	0.96	1.00
0.25	1.02	1.02	1.02	1.02	1.02	1.02	1.03
0.50	1.07	1.08	1.08	1.08	1.09	1.09	1.10
1.0	1.26	1.28	1.30	1.32	1.34	1.36	1.38
1.5	1.53	1.57	1.61	1.66	1.71	1.77	1.83
2.0	1.81	1.89	1.98	2.07	2.18	2.29	2.42
2.5	2.09	2.21	2.35	2.51	2.69	2.89	3.13
3.0	2.34	2.51	2.71	2.94	3.22	5.55	3.94
4.0	2.75	3.02	3.35	3.76	4.28	4.93	5.78
5.0	3.06	3.42	3.88	4.48	5.28	6.37	7.89
6.0	3.29	3.73	4.31	5.09	6.20	7.84	10.3
7.0	3.46	3.97	4.65	5.60	7.03	9.29	12.9
8.0	3.59	4.15	4.92	6.03	7.75	10.7	15.9
9.0	3.69	4.29	5.13	6.37	8.37	12.0	19.1
10.0	3.76	4.39	5.29	6.64	8.88	13.2	22.5
12.0	3.87	4.56	5.54	7.06	9.72	15.4	30.4
14.0	3.94	4.67	5.71	7.36	10.3	17.1	39.5
16.0	3.99	4.74	5.83	7.56	10.7	18.5	49.9
18.0	4.03	4.79	5.91	7.71	11.1	19.6	61.4
20.0	4.05	4.83	5.97	7.82	11.3	20.5	74,1

### 3.6- Segundo Exemplo de Aplicação

Considere-se o caso de um edifício de 13 andares também analisado por França, com altura total de 37.7 m, pé direito de 2.9 m, com peso total de 42900 kN, com oito pórticos de duas colunas na direção de estudo, cujas vigas têm vão de 8.75 m, inércia efetiva de  $0.00229 \text{ m}^4$ , colunas com seção de  $0.25 \text{ m} \times 0.75 \text{ m}$ , e inércia efetiva de  $0.00703 \text{ m}^4$ , e módulo de elasticidade valendo  $2.77 \times 10^7 \text{ N/m}^2$ . Com esses dados, tem-se:

$$j_f = 2 \times 0.00703 \times 2.77 \times 10^7 = 3.89 \times 10^5 \text{ kNm}^2$$

$$K_0 = 2.77 \times 10^7 \left[ 0.8 \times 2 \times 0.25 \times 0.75 \times (8.75 / 2)^2 \right] = 1.593 \times 10^8 \text{ kNm}^2$$

$$k_v = 2.77 \times 10^7 \times 0.00229 / 8.75 = 7249 \text{ kNm}$$

$$k_c = 2.77 \times 10^7 \times 0.00703 / 2.9 = 67149 \text{ kNm}$$

$$R_1 = \frac{2k_c}{2k_c + k_v} = 0.949$$

$$j_f = R_1 K_1 = 369610 \text{ kNm}^2$$

$$\mu_f^2 = 1 + \frac{j_f}{K_0} = 1.0023$$

$$s_f = \frac{12k_c}{h} \frac{2k_v}{2k_c + k_v} = 28468 \text{ kN}$$

$$\lambda_f = H \sqrt{\frac{\mu_f^2 s_f}{j_f}} = 10.47$$

$$q = 13.6 / 2.9 = 4,69 \text{ kN/m}$$

$$N_c = 7.837 \times 24.4 \frac{369600}{37.7^2} = 49822 \text{ kN}$$

$$\gamma_s = \frac{1}{1 - 5362.5 / 49822} = 1.12$$

onde se considera a normal atuante  $N = 5362.5 \text{ kN}$ , que vem a ser 1/8 do peso do prédio examinado por França, cujos resultados tendo-se em conta os efeitos de segunda ordem estão lançados na Tabela 3.3

Um exame dos resultados exibidos na Tabela 3.3 deixa claro que os resultados da Técnica do Meio Contínuo são muito próximos dos resultados obtidos com a clássica análise matricial.

Por outro lado, tendo-se em vista que:

$$N_c = \rho_c H = s \frac{7.837 j_f}{H^2} \quad (3.37)$$

Tabela 3.3

ANDAR	DEFORMADA (m)	
	Tec. Meio Contínuo	França
Base	0.0000	0.0000
1	0.0056	0.0054
2	0.0175	0.0173
3	0.0314	0.0312
4	0.0452	0.0454
5	0.0585	0.0588
6	0.0795	0.0709
7	0.0812	0.0815
8	9.0904	0.0907
9	0.0982	0.0983
10	0.104	0.104
11	0.109	0.0109
12	0.113	0.112
13	0.116	0.115

o coeficiente de instabilidade de Beck assim fica redigido:

$$\alpha_c = H \sqrt{\frac{N_c}{j_f}} = 2.8\sqrt{s} \quad (3.38)$$

ou seja, para  $N_k / N_c = 0.05$  tem-se:

$$\alpha_k = H \sqrt{\frac{N_k}{j_f}} = 0.626\sqrt{s} \quad (6.39)$$

ou seja, o coeficiente de Beck varia de 0.6 a 5.38 no caso de pórtico com deformação axial desprezível ( $\mu_f = 1$ ) e  $\lambda_f$  até da ordem de 20.

### 3.7- Influência de Base Flexível

O ponto de partida para se levar em consideração a influência da deformabilidade da fundação na carga crítica da estrutura, de maneira aproximada pelo Teorema de Southwell, consiste em se assumir que a carga de flambagem é proporcional à rigidez.

A Figura 3.4a) ilustra o caso de um painel parede, onde  $K_F$  é a rigidez rotacional da base elástica, ou seja,  $M = K_F \theta_F$ , sendo  $\theta_F$  a rotação na base, e a parede com sua deformada. Trata-se, pois, do caso clássico de superposição em série de molas, como ilustram as Figuras 3.4b) e c), permitindo-se formular a seguinte redação:

$$\frac{1}{K_e} = \frac{1}{K_F} + \frac{1}{K_p} \tag{3.40}$$

onde  $K_p$  é a correspondente rigidez da parede e  $K_e$  a rigidez equivalente do conjunto; ou ainda, admitindo-se que a cargas críticas individuais são proporcionais às rigidezes:

$$\frac{1}{P_{c_e}} = \frac{1}{P_{c_F}} + \frac{1}{P_{c_p}} \tag{3.41}$$

onde  $P_{c_e}$  é a carga crítica do conjunto e:

$$P_{c_F} = \frac{K_F}{2H} \tag{3.42}$$

$$P_{c_p} = 7.837 \frac{EI}{H^2}$$

as cargas críticas individuais da fundação e da parede, respectivamente, resultando-se:

$$P_{c_e} = \frac{P_{c_F} + P_{c_p}}{P_{c_F} P_{c_p}} \tag{3.43}$$

Que vem a ser uma expressão expedita de se avaliar a carga crítica de flambagem com a consideração de fundação elástica.

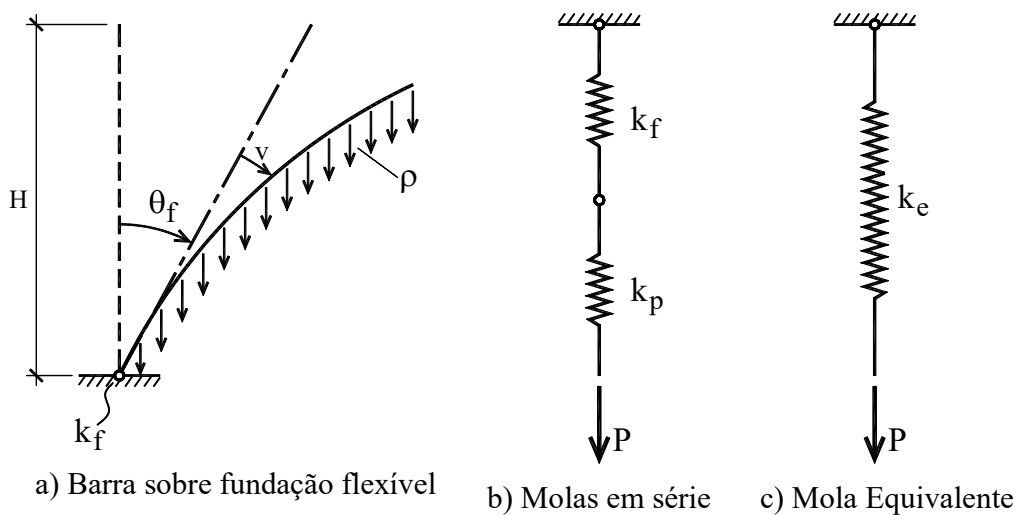


Figura 3.4



### 3.8- Solução Geral para Desalinhamento Qualquer

A integração da equação diferencial de uma barra bi apoiada comprimida e com desalinhamento senoidal foi trabalhada no item 3.1 com facilidade por se tratar de um caso bem particular, pois a função que descreve o desalinhamento coincide com o primeiro modo de flambagem. Agora o problema vai ser estendido para outros casos de desalinhamento. Para tanto, o expresso em (3.1) pode ser colocado como:

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{P}{EI} y(x) = -\frac{P}{EI} v_0(x) \quad (3.44)$$

cuja equação homogênea:

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{P}{EI} y(x) = 0 \quad (3.45)$$

consiste no problema de autovalor (flambagem), cujos autovalores (carga de flambagem) e autofunções (modos de flambagem) são expressos, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{P_n}{EI}} = n\pi \rightarrow P_n = \frac{n^2 \pi^2 EI}{\ell^2} \\ y_n(x) = \text{sen} \frac{n\pi x}{\ell} \end{aligned} \quad (3.46)$$

com  $n = 0, 1, 2, \dots$ . A solução geral de (3.44) pode ser expressa por:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n y_n(x) \quad (3.47)$$

que consiste na expressão básica da clássica técnica da superposição modal, que decorre do fato de os modos de flambagem serem ortogonais entre si, ou seja:

$$\int_0^{\ell} y_i(x) y_j(x) dx = \begin{cases} 0 \rightarrow i \neq j \\ \int_0^{\ell} y_i^2(x) dx = \frac{\ell}{2} \rightarrow i = j \end{cases} \quad (3.48)$$

uma vez que substituindo-se (3.47) em (3.44), multiplicando-se membro a membro por um dos modos de flambar, e integrando-se membro a membro no intervalo de 0 a  $\ell$ , tem-se:

$$\int_0^{\ell} \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{d^2 y_n(x)}{dx^2} \right) y_j(x) dx + \int_0^{\ell} \frac{P}{EI} \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n y_n(x) \right) y_j(x) dx = -\frac{P}{EI} \int_0^{\ell} v_0(x) y_j(x) dx \quad (3.49)$$

ou seja:

$$a_i = \frac{-\frac{P}{EI} \int_0^\ell v_0(x) y_i(x) dx}{\left( -\left(\frac{i\pi}{\ell}\right)^2 + \frac{P}{EI} \right) \int_0^\ell y_i^2(x) dx} \quad (3.50)$$

ou ainda:

$$a_i = \frac{2 \int_0^\ell v_0(x) y_i(x) dx}{\ell \left( \frac{P_c i^2}{P} - 1 \right)} \quad (3.51)$$

onde  $P_c = \pi^2 EI / \ell^2$ .

A deformada final fica então expressa por:

$$v(x) = v_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \int_0^\ell v_0(x) y_n(x) dx}{\ell \left( \frac{P_c n^2}{P} - 1 \right)} y_n(x) \quad (3.52)$$

cabendo-se ressaltar que o denominador da segunda parcela de (3.52) cresce com o quadrado de  $n$  multiplicado pelo fator  $p_c/p$  que é também maior que a unidade ( $P_c > P$ ). Em outras palavras, os termos de ordem superior em (3.52) são significativamente menores que o primeiro termo. Exemplificando-se, no caso em que o desalinhamento é afim ao primeiro modo de flambagem como examinado no item 3.1, tem-se:

$$v(x) = f_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) + \frac{1}{\frac{P_c}{P} - 1} f_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) = \frac{f_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)}{1 - \frac{P}{P_c}} \quad (3.53)$$

e no caso de afinidade com o segundo modo de flambagem:

$$v(x) = f_0 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{\ell}\right) + \frac{1}{\frac{2^2 P_c}{P} - 1} f_0 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{\ell}\right) = \frac{f_0 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{\ell}\right)}{1 - \frac{P}{4P_c}} \quad (3.54)$$

ou seja, a amplificação de segunda ordem cai significativamente para desalinhamento com afinidade aos modos mais altos de flambagem, fato que é levado em conta nas normas internacionais, ao só considerar o efeito de segunda ordem do primeiro modo de flambagem.

## APÊNDICE

### Matriz de Flexibilidade

A Figura A1 ilustra a discretização empregada na formulação via matriz de flexibilidade do problema de instabilidade de pórtico considerando-se a deformação axial das colunas como anunciado no item 3.5. A Figura A1a) exhibe a discretização em questão indicando-se o carregamento nos nós, a Figura A1b) ilustra uma configuração local de deslocamentos e carregamento, bem como a Figura A1c) exhibe a notação das forças horizontais atuantes e os respectivos deslocamentos experimentados. A Figura A1d) mostra o carregamento unitário aplicado ao nó  $k$ , para a determinação dos deslocamentos correspondentes aos elementos da matriz de flexibilidade para posições  $j < k$ .

A força cortante nos andares  $j$  e  $j+1$  valem:

$$V_j = \left( n - j + \frac{1}{2} \right) \rho h \left( \frac{u_j - u_{j-1}}{h} \right)$$

$$V_{j+1} = \left( n - j - \frac{1}{2} \right) \rho h \left( \frac{u_{j+1} - u_j}{h} \right)$$
(A1)

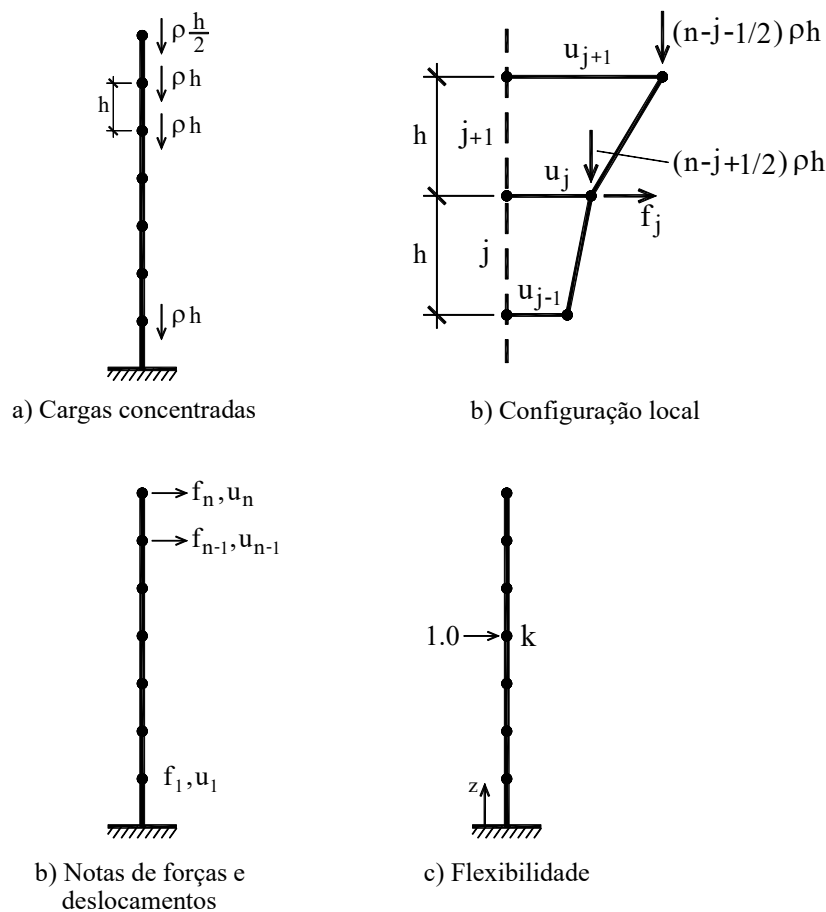


Figura A1

e, conseqüentemente a força aplicada no nó  $j$  vale:

$$f_j = V_j - V_{j+1} = -\left(n - j + \frac{1}{2}\right)\rho u_{j-1} + (2n - 2j)\rho u_j - \left(n - j - \frac{1}{2}\right)\rho u_{j+1} \quad (\text{A2})$$

resultando-se na expressão matricial:

$$\{f\} = \rho[D]\{u\} \quad (\text{A3})$$

onde  $\{f\}$  é o vetor das forças nodais,  $[D]$  uma matriz simétrica tri-diagonal e  $\{u\}$  o vetor dos deslocamentos.

A matriz de flexibilidade, como ilustrado na Figura A1d), é obtida mediante a integração de (2.32):

$$j_f \frac{d^4 u_f(z)}{dz^4} - s_f \mu_f^2 \frac{d^2 u_f(z)}{dz^2} + \frac{s_f}{K_0} (z_k - z) = 0 \quad (\text{A4})$$

com as seguintes condições de contorno (vide (2.35)):

$$\begin{aligned} u(z=0) &= 0 \\ \frac{du(z=0)}{dz} &= 0 \\ \frac{d^2 u(z=z_k)}{dz^2} &= 0 \\ \frac{d^3 u(z=0)}{dz^3} &= \frac{1}{j_f} \end{aligned} \quad (\text{A5})$$

tem a seguinte redação:

$$\delta_{ik} = \frac{H^3}{j_f} \left[ \frac{2\mu^2 - 1}{2\lambda^3 \mu^2 \text{ch}(rz_k)} (e^{-rz_k} e^{rz_i} - e^{rz_k} e^{-rz_i}) - \frac{(2\mu^2 - 1)}{\mu^2} \left( \frac{z_i}{\lambda^2 H} - \frac{\text{th}(rz_k)}{\lambda^3} \right) + \right. \\ \left. - \frac{(\mu^2 - 1)}{2\mu^2} \left( \frac{1}{3} \left( \frac{z_i}{H} \right)^3 - \frac{z_k z_i}{H^2} \right) \right] \quad (\text{A5})$$

com  $i < k$ , ficando-se a matriz de flexibilidade com a seguinte redação:

$$[\delta_{ij}] = \frac{H^3}{j_f} [F] \quad (\text{A6})$$

sendo que os elementos de  $[F]$  só dependem dos parâmetros  $\lambda$  e  $\mu^2$ .

O equilíbrio do conjunto passa, então, a ser expresso por:

$$\frac{\rho H^3}{j_f} [F][D]\{u\} = \{u\} \quad (\text{A7})$$

resultando-se no problema de autovalores:

$$\left( \frac{\rho H^3}{j_f} [F][D] - [I] \right) \{u\} = \{0\} \quad (\text{A8})$$

cujo autovalor é expresso por  $\rho H^3 / j$ , ou ainda:

$$\left( [F][D] - \frac{j_f}{\rho H^3} [I] \right) \{\bar{u}\} = \{0\} \quad (\text{A9})$$

mediante a transformação:

$$\{\bar{u}\} = \frac{\rho H^3}{j_f} \{u\} \quad (\text{A10})$$

valendo-se notar que o menor valor da carga crítica ( $N_c = \rho_c H$ ) está relacionada com o maior autovalor:

$$\lambda_c = \frac{j_f}{N_c H^2} \quad (\text{A11})$$

facultando-se, pois, a redação (3.37).

## CAPÍTULO IV

### VIBRAÇÃO LIVRE NÃO AMORTECIDA DE PAINÉIS DE CONTRAVENTAMENTO

#### 4.1- Painel Parede

A Figura 4.1a) exibe o painel parede, sua deformada típica está ilustrada na Figura 4.b) e a configuração do equilíbrio dinâmico elementar mostrado na Figura 4.1c).

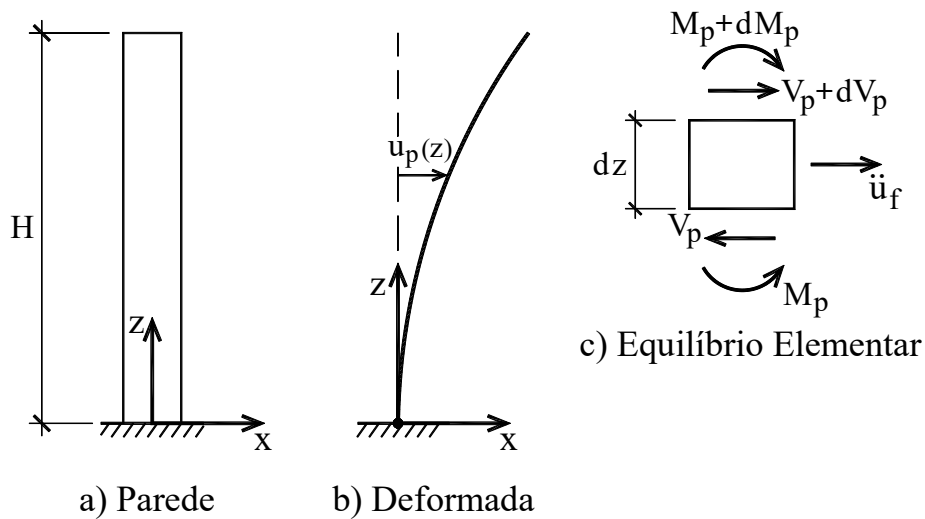


Figura 4.1

A Teoria Técnica da Flexão prescreve as seguintes relações:

$$\frac{dM_w(z, t)}{dz} = -V_w(z, t) \quad (4.1)$$

$$M_w(z, t) = j_w \frac{d^2 u(z, t)}{dz^2}$$

sendo  $M_w(z, t)$  o momento fletor na parede,  $V_w(z, t)$  o esforço cortante,  $u(z, t)$  a deformada e  $j_w$  o produto de inércia. Por outro lado, a segunda Lei de Newton permite redigir a equação de movimento da parede:

$$\frac{dV_w(z, t)}{dz} = m \frac{d^2 u(z, t)}{dt^2} \quad (4.2)$$

onde  $m$  é a massa por unidade de comprimento da parede. Tendo-se em conta as relações (4.1), a equação de movimento (4.2) ganha a redação:

$$\frac{d^4 u(x, t)}{dx^4} + \frac{m}{j_w} \frac{d^2 u(x, t)}{dt^2} = 0 \quad (4.3)$$

cuja solução, pela técnica da separação de variáveis, permite a redação:

$$u(x, t) = u(x)T(t) \quad (4.4)$$

sendo  $u(x)$  agora função exclusiva da variável espaço  $x$ , visando simplificar a notação, e  $T(t)$  uma função exclusiva do tempo. Face ao exposto em (4.4), a equação (4.3) permite redigir:

$$\frac{d^4 u(z)}{dz^4} = -\frac{d^2 T(t)}{T} = \omega^2 \quad (4.5)$$

onde a frequência angular  $\omega$  vem a ser a constante de separação, resultando-se na equação de frequência:

$$\frac{d^4 u(z)}{dz^4} - \frac{m\omega^2}{j_w} u(z) = 0 \quad (4.6)$$

e na equação harmônica:

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \omega^2 T(t) = 0 \quad (4.7)$$

cuja integração se expressa:

$$T(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) \quad (4.8)$$

onde  $A$  e  $B$  são as constantes de integração de (4.7) relacionadas com as condições iniciais do movimento, a ser trabalhadas mais tarde.

Voltando-se a atenção para a equação de frequência (4.6), verifica-se de início que as condições cinemáticas de contorno são prescritas pela vinculação da parede na base, ou seja:

$$\begin{aligned} u(z=0) &= 0 \\ \frac{du(z=0)}{dz} &= 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

exprimindo-se o fato de deslocamento e rotação nulos, bem como as condições de contorno mecânicas, ou seja:

$$\begin{aligned}\frac{d^2u(z=H)}{dz^2} &= \frac{M_w(z=0)}{j_w} = 0 \\ \frac{d^3u(z=H)}{dz^3} &= \frac{-V_w(z=0)}{j_w} = 0\end{aligned}\quad (4.10)$$

uma vez que o momento fletor e o esforço cortante são nulos no topo.

A equação característica de (4.6) se escreve:

$$\beta^4 - \frac{m\omega^2}{j_w} = 0 \quad (4.11)$$

cujas raízes são:  $\beta = \pm\sqrt[4]{m\omega^2 / j_w}$  e  $\beta = \pm i\sqrt[4]{m\omega^2 / j_w}$ , resultando-se na solução:

$$u(z) = C_1 \operatorname{sh}(\beta z) + C_2 \operatorname{ch}(\beta z) + C_3 \operatorname{sen}(\beta z) + C_4 \cos(\beta z) \quad (4.12)$$

onde  $C_i$  são as constantes de integração. Assim, tendo-se em conta as condições de contorno (4.8) e (4.9) tem-se:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sh}(\beta H) & \operatorname{ch}(\beta H) & \operatorname{sen}(\beta H) & -\cos(\beta H) \\ \operatorname{ch}(\beta H) & \operatorname{sh}(\beta H) & -\cos(\beta H) & \operatorname{sen}(\beta H) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.12)$$

que consiste num problema de autovalor, cuja equação característica se expressa:

$$\operatorname{ch}(\beta H) \cos(\beta H) + 1 = 0 \quad (4.13)$$

cujas raízes são:

$$\begin{aligned}\beta_1 H &= 1.875 \\ \beta_2 H &= 4.694 \\ \beta_3 H &= 7.855 \\ \beta_i H &\cong \frac{2i-1}{2} \pi \rightarrow i > 3\end{aligned}\quad (4.14)$$

resultando-se nas frequências angulares naturais:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \frac{3.516}{H^2} \sqrt{j_w / m} \\ \omega_2 &= \frac{22.03}{H^2} \sqrt{j_w / m} \\ \omega_3 &= \frac{61.70}{H^2} \sqrt{j_w / m} \\ \omega_i &\cong \left( \frac{2i-1}{2} \pi \right)^2 \frac{1}{H^2} \sqrt{j_w / m} \rightarrow i > 3\end{aligned}\quad (4.15)$$



correspondendo-se aos modos naturais de vibração:

$$u_w^i(\eta) = \text{coh}(\beta_i \eta) - \cos(\beta_i \eta) + \frac{\text{coh}(\beta_i H) + \cos(\beta_i H)}{\text{seh}(\beta_i H) + \text{sen}(\beta_i H)} (\text{sen}(\beta_i \eta) - \text{seh}(\beta_i \eta)) \quad (4.16)$$

que são ortogonais entre si, ou seja:

$$\int_0^1 m u_w^i(\eta) u_w^j(\eta) d\eta = 0 \quad (4.17)$$

permitindo-se, pois, o emprego da técnica da superposição modal na solução geral do movimento.

#### 4.2- Primeiro Exemplo de Aplicação

Considere-se o painel parede de um edifício de 13 andares com pé direito de 2.9m já examinado no item 3.4, com a seguintes características:

$$\begin{aligned} H &= 37.7\text{m} \\ j_w &= 2.58 \times 10^{10} \text{ Nm}^2 \\ m &= 12.557 \times 10^4 \text{ kg / m} \end{aligned}$$

cujas três primeiras frequências naturais são arroladas na tabela a seguir:

	1º modo	2º modo	3º modo
$a_i$ vide (4.15)	3.516	22.03	61.70
$\omega_i$ (rad./s)	1.121	7.026	19.68
$f_i$ (Hz)	0.179	1.118	3.132

valendo-se assinalar que se trata de uma estrutura bastante flexível, como já mencionado no item 3.4.

#### 4.3- Pórtico sem Deformação Axial dos Pilares

A Figura 4.2 ilustra um pórtico, sua deformada típica e a configuração de equilíbrio de um elemento diferencial do pórtico já suposto em sua consideração contínua.

Tendo-se em conta o expresso em (2.12) e em (4.2), a equação de movimento livre não amortecido do pórtico ganha a seguinte redação:

$$\frac{dV_f(z, t)}{dz} = s_f \frac{d^2 u_f(z, t)}{dz^2} - j_f \frac{d^4 u_f(z, t)}{dz^4} = m \frac{d^2 u_f(z, t)}{dt^2} \quad (4.18)$$

ou ainda:

$$j_f \frac{d^4 u_f(z, t)}{dz^4} - s_f \frac{d^2 u_f(z, t)}{dz^2} + m \frac{d^2 u_f(z, t)}{dt^2} = 0 \quad (4.19)$$

cuja equação de frequência, tendo-se em vista (4.4) e (4.5), resulta:

$$j_f \frac{d^4 u_f(z)}{dz^4} - s_f \frac{d^2 u_f(z)}{dz^2} - m\omega^2 u_f(z) = 0 \quad (4.20)$$

sujeita às seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} u_f(z=0) &= 0 \\ \frac{du_f(z=0)}{dz} &= 0 \\ \frac{d^2 u_f(z=H)}{dz^2} &= 0 \\ j_f \frac{d^3 u_f(z=H)}{dz^3} - s_f \frac{du_f(z=H)}{dz} &= 0 \end{aligned} \quad (4.21)$$

onde as duas primeiras de (4.21) decorrem das condições de vinculação do pórtico na base, e as duas últimas, decorrem, respectivamente, do fato de ser nulo o momento fletor e o esforço cortante no topo (vide (2.12)).

A equação característica de (4.20) resulta:

$$j_f \beta^4 - s_f \beta^2 - m\omega^2 = 0 \quad (4.22)$$

cujas raízes (autovalores) são dadas por:

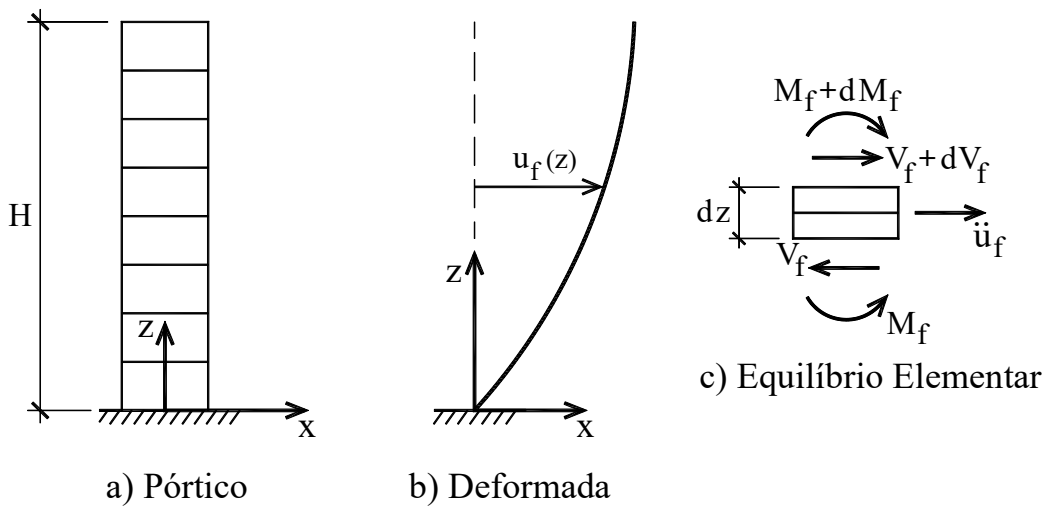


Figura 4.2

$$\begin{aligned} \beta_{1,2} &= \pm \lambda_1 / H = \pm \sqrt{\sqrt{\left(\frac{s_f}{2j_f}\right)^2 + \frac{m\omega^2}{j_f}} + \frac{s_f}{2j_f}} \\ \beta_{3,4} &= \pm i \lambda_2 / H = \pm i \sqrt{\sqrt{\left(\frac{s_f}{2j_f}\right)^2 + \frac{m\omega^2}{j_f}} - \frac{s_f}{2j_f}} \end{aligned} \quad (4.23)$$

com  $i$  sendo a unidade complexa, valendo-se as seguintes relações:

$$\begin{aligned}\lambda_1^2 - \lambda_2^2 &= \lambda_f^2 \\ \lambda_1^2 \lambda_2^2 &= \frac{mH^4 \omega^2}{j_f}\end{aligned}\quad (4.24)$$

onde:

$$\lambda_f = H \sqrt{\frac{s_f}{j_f}} \quad (4.25)$$

sendo que a segunda de (4.24) permite, pois, expressar a frequência angular natural na forma:

$$\omega_i = \lambda_1^i \lambda_2^i \sqrt{\frac{j_f}{mH^4}} \quad (4.26)$$

e o período:

$$T_i = a_i \sqrt{\frac{mH^4}{j_f}} \quad (4.27)$$

sendo  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  via (4.23) autovalores de (4.22), e o fator  $a_i$  juntamente com os autovalores  $\lambda_1^i$  e  $\lambda_2^i$  são arrolados na Tabela 4.1 para os três primeiros modos de vibrar correspondentes ao parâmetro  $\lambda$  variando-se de 0 a 10. Assim sendo, a integração de (4.20) se explicita:

$$u_f(z) = C_1 \operatorname{seh}(\lambda_1 z) + C_2 \operatorname{coh}(\lambda_1 z) + C_3 \operatorname{sen}(\lambda_2 z) + C_4 \operatorname{cos}(\lambda_2 z) \quad (4.28)$$

resultando-se no problema de autovalores:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \lambda_1 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ \lambda_1^2 \operatorname{seh}(\lambda_1) & \lambda_1^2 \operatorname{coh}(\lambda_1) & -\lambda_2^2 \operatorname{sen}(\lambda_2) & -\lambda_2^2 \operatorname{cos}(\lambda_2) \\ \lambda_1 \operatorname{coh}(\lambda_1) & \lambda_1 \operatorname{seh}(\lambda_1) & -\lambda_2 \operatorname{cos}(\lambda_2) & \lambda_2 \operatorname{sen}(\lambda_2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.29)$$

cujos autovalores  $\lambda_1^i$  e  $\lambda_2^i$  são arrolados na Tabela 4.1 para os três primeiros modos de vibrar correspondentes ao parâmetro  $\lambda$  variando-se de 0 a 10, bem como o fator  $a_i$  da frequência angular natural do pórtico (vide (4.26) e (4.27)).

Por outro lado, os modos de vibração (4.28), tomando-se em (4.29)  $C_4 = -1$ , resulta:

$$\begin{aligned}u_f(z) &= \frac{\lambda_1^2 \operatorname{coh}(\lambda_1) + \lambda_2^2 \operatorname{cos}(\lambda_2)}{\lambda_1^2 \operatorname{seh}(\lambda_1) + \lambda_1 \lambda_2 \operatorname{sen}(\lambda_2)} \left[ \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \operatorname{sen}\left(\frac{\lambda_2 z}{H}\right) - \operatorname{senh}\left(\frac{\lambda_1 z}{H}\right) \right] + \\ &\operatorname{coh}\left(\frac{\lambda_1 z}{H}\right) - \operatorname{cos}\left(\frac{\lambda_2 z}{H}\right)\end{aligned}\quad (4.30)$$

que consiste numa forma modal não normalizada, ou seja:

$$\int_0^H u_f^2(z) dz \neq 1 \quad (4.31)$$

mas, mesmo assim, mais apropriada.

Tabela 4.1

$\lambda$	Raízes e $a_i$	Modos		
		1º	2º	3º
0	$\lambda_1$	1.875	4.694	7.855
	$\lambda_2$	1.875	4.864	7.855
	$a_i$	1.787	0.2852	0.1018
0.5	$\lambda_1$	1.950	4.727	7.873
	$\lambda_2$	1.855	4.700	7.857
	$a_i$	1.709	0.2828	0.1016
1.0	$\lambda_1$	2.154	4.823	7.926
	$\lambda_2$	1.908	4.718	7.863
	$a_i$	1.529	0.2761	0.1008
1.5	$\lambda_1$	2.445	4.977	8.014
	$\lambda_2$	1.930	4.746	7.872
	$a_i$	1.331	0.2660	0.09959
2.0	$\lambda_1$	2.789	5.182	8.135
	$\lambda_2$	1.944	4.781	7.886
	$a_i$	1.159	0.2536	0.09794
2.5	$\lambda_1$	3.168	5.429	8.288
	$\lambda_2$	1.946	4.819	7.902
	$a_i$	1.019	0.2401	0.09594
3.0	$\lambda_1$	3.571	5.711	8.470
	$\lambda_2$	1.938	4.859	7.921
	$a_i$	0.9079	0.2264	0.09366
4.0	$\lambda_1$	4.431	6.350	8.912
	$\lambda_2$	1.906	4.932	7.964
	$a_i$	0.7442	0.2006	0.8853
5.0	$\lambda_1$	5.337	7.062	9.442
	$\lambda_2$	1.867	4.987	8.009
	$a_i$	0.6307	0.1784	0.08308

6.0	$\lambda_1$	6.273	7.826	10.04
	$\lambda_2$	1.830	5.024	8.054
	$a_i$	0.5472	0.1598	0.7768
7.0	$\lambda_1$	7.228	8.628	10.70
	$\lambda_2$	1.799	5.044	8.093
	$a_i$	0.4831	0.1444	0.07255
10	$\lambda_1$	10.15	11.20	12.91
	$\lambda_2$	1.735	5,044	8.170
	$a_i$	0.3568	0.1112	0.05056
15	$\lambda_1$	15.09	15.81	17.09
	$\lambda_2$	1.680	4.987	8.191
	$a_i$	0.2477	0.07971	0.04488
20	$\lambda_1$	20.07	20.60	21.60
	$\lambda_2$	1.652	4.934	8.161
	$a_i$	0.1895	0.06182	0.03564

#### 4.4- Segundo Exemplo de Aplicação

Considere-se o painel pórtico já examinado no item 3.6, com a seguintes características:

$$H = 37.7\text{m}$$

$$j_f = 3.692 \times 10^8 \text{ Nm}^2$$

$$s_f = 28468 \text{ kN}$$

$$\lambda_f = H \sqrt{\frac{s_f}{j_f}} = 10,46$$

$$m = 1.42 \times 10^4 \text{ kg / m}$$

cujos três primeiros períodos naturais e respectivas frequências são arrolados na tabela a seguir:

	1º modo	2º modo	3º modo
$a_i$ vide (4.26)	0.347	0.108	0.050
T (s)	3.060	0.9527	0.4413
$f_i$ (Hz)	0.328	1.050	2.266

valendo-se registrar que os valores de  $a_i$  foram obtidos por interpolação, e que o pórtico em questão não se mostra muito rígido.

#### 4.5- Pórtico com Deformação dos Pilares

A equação de equilíbrio dinâmico do pórtico, assim como expresso em (4.2), tem a seguinte redação:

$$\frac{dV_f(z, t)}{dz} = -q_f(z, t) = m \frac{d^2 u(z, t)}{dt^2} \quad (4.32)$$

devendo-se ter em conta não haver carga distribuída externa aplicada. Assim, derivando-se duas vezes (2.32), o expresso em (4.32) permite a escrita:

$$j_f \frac{d^6 u_f(z, t)}{dz^6} - s_f \mu_f^2 \frac{d^4 u_f(z, t)}{dz^4} + \frac{s_f}{K_0} \left[ -m \frac{d^2 u_f(z, t)}{dt^2} \right] + m \frac{d^2}{dz^2} \left( \frac{d^2 u_f(z, t)}{dt^2} \right) = 0 \quad (4.33)$$

resultando-se, a exemplo de (4.4) e (4.5). na equação de frequência:

$$\frac{d^6 u_f(\eta)}{d\eta^6} - \lambda_f \frac{d^4 u_f(\eta)}{d\eta^4} + \lambda_f \frac{\mu_f^2 - 1}{\mu_f^2} \left( \frac{m\omega^2 H^4}{j_f} \right) u_f(\mu) - \left( \frac{m\omega^2 H^4}{j_f} \right) \frac{d^2 u_f(\eta)}{d\eta^2} = 0 \quad (4.34)$$

onde  $\eta = z/H$ , com as seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} u(\eta=0) &= 0 \\ \frac{du(\eta=0)}{d\eta} &= 0 \\ \frac{d^2 u(\eta=1)}{d\eta^2} &= 0 \\ \frac{d^4 u(\eta=1)}{d\eta^4} - \lambda_f \frac{d^2 u(\eta=1)}{d\eta^2} + \left( \frac{m\omega^2 H^4}{j_f} \right) u(\eta=1) &= 0 \\ \frac{d^5 u(\eta=1)}{d\eta^5} - \lambda_f \frac{d^3 u(\eta=1)}{d\eta^3} + \left( \frac{m\omega^2 H^4}{j_f} \right) \frac{du(\eta=1)}{d\eta} &= 0 \end{aligned} \quad (4.35)$$

sendo que as duas primeiras decorrem da vinculação do pórtico na base, a terceira em decorrência do fato de ser nula a normal no topo, bem como o momento fletor, a quarta e a quinta pelo fato de serem nulos o momento fletor e a força cortante no topo (vide (2.32)).

O fato de a integração analítica de (4.34) envolver tarefa de grande monta e também não apropriada, levou Murashev, Sigalov e Baikov (Design of Reinforced Concrete Structures, Mir Publishers, Moscow, 1971), bem como Rosman (R. Rosman, Dynamics and stability of shear wall Building structures, Proc. Inst. Civ Eng., Part. 2, V1, 1973), a optar por formular uma variante de integração com base na correspondente matriz de flexibilidade, verificando-se ser suficiente precisa considerando-se apenas de 8 a 10 graus de liberdade. O

Apêndice mostra em detalhes a formulação em apreço. Os gráficos da Figura 4.3 exibem o resultado para os períodos naturais, com base nos autovalores:

$$\lambda_i = \frac{m\omega^2 H^4}{J_f} \quad (4.36)$$

ou seja, com o período natural expresso na forma:

$$T_i = a_i H^2 \sqrt{\frac{m}{J_f}} \quad (4.37)$$

para os três primeiros modos de vibração em função dos parâmetros adimensionais  $\lambda_f$  e  $\mu_f^2$ .

Aqueles autores divulgaram uma Tabela arrolando-se os modos de vibração para os três primeiros modos de vibração, contemplando-se três valores típicos dos parâmetros adimensionais  $\lambda_f$  e  $\mu_f^2$ , e tendo-se em conta uma malha com 10 pontos correspondente à matriz de flexibilidade adotada. Todavia, tudo indica haver erro de digitação nos valores da tabela e, por essa razão aqui não apresentada. De qualquer maneira, os modos de vibração expressos em (4.30) constituem uma boa aproximação.

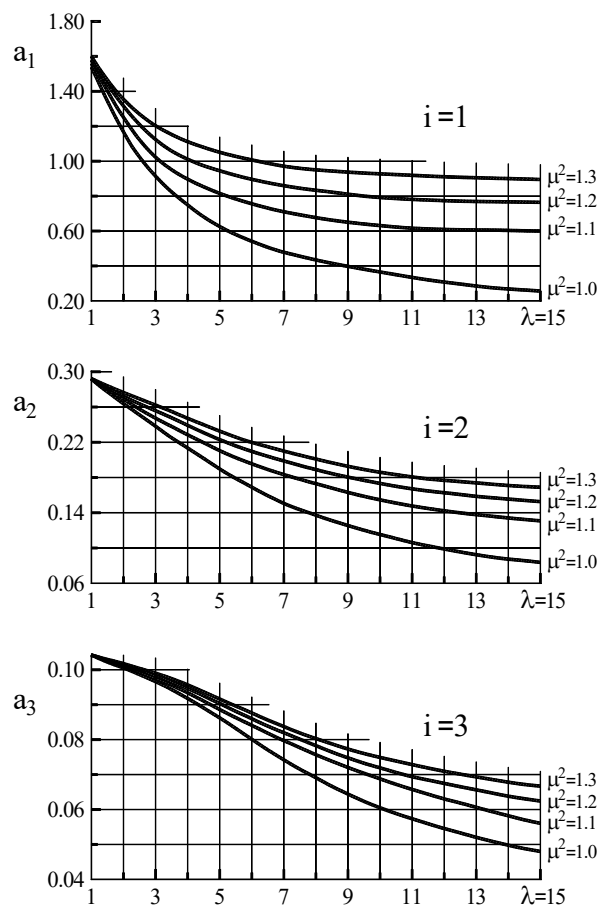


Figura 4.3

#### 4.6-Terceiro Exemplo de Aplicação

Considere-se o painel pórtico já examinado no item 4.4 tendo-se em conta agora a deformação axial das colunas, com as seguintes características:

$$H = 37.7\text{m}$$

$$j_f = 369161\text{kNm}^2$$

$$s_f = 28468\text{kN}$$

$$\lambda_f = H \sqrt{\frac{s_f}{j_f}} = 10,46$$

$$\mu_f^2 = 1.1$$

$$m = 14.22\text{t / m}$$

cuja três primeiros períodos naturais e respectivas frequências são arrolados na tabela a seguir:

	1º modo	2º modo	3º modo
$a_i$ vide (4.26)	0.610	0.148	0.0610
T (s)	5.38	1.305	0.538
$f_i$ (Hz)	0.186	0.766	1.859

valendo-se registrar que os valores de  $a_i$  foram obtidos por interpolação nos gráficos da Figura 4.3, e que, nesse caso, a influência da deformação das colunas se mostra significativa.

#### 4.7- Amortecimento Estrutural e Vibração Forçada

O amortecimento estrutural é tema bastante complicado, afinal os mecanismos de eliminação de energia não são ainda bem conhecidos. Todavia, como as forças contrárias à velocidade são de pequena magnitude nos casos práticos, vários modelos matemáticos para descrever o amortecimento estrutural têm sido propostos; sendo bem conhecido o modelo Kelvin-Voight (amortecimento proporcional à rigidez) assim expresso:

$$\sigma(z, t) = E \left( \varepsilon(z, t) + c \frac{d\varepsilon(z, t)}{dt} \right) \quad (4.38)$$

onde  $c$  é a constante de amortecimento e  $E$  o módulo de elasticidade do material, resultando-se na relação momento-curvatura:

$$M(z, t) = EI \frac{d^2u(z, t)}{dz^2} + c \frac{d}{dt} \left( EI \frac{d^2u(z, t)}{dz^2} \right) \quad (4.39)$$

sendo  $EI$  o produto de inércia, a qual permite, por exemplo, uma nova redação para a equação de movimento (4.2), ou seja:



$$j_w \frac{d^4 u(z, t)}{dz^4} + c j_w \frac{d}{dt} \left( \frac{d^4 u(z, t)}{dz^4} \right) + m \frac{d^2 u(z, t)}{dt^2} = p(z, t) \quad (4.40)$$

cuja solução pode ser expressa pela superposição modal:

$$u(z, t) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i(t) u_i(z) \quad (4.41)$$

sendo  $u_i(z)$  o modo de vibração livre (4.16). Substituindo-se (4.41) em (4.40), a ortogonalidade dos modos (4.17) permite desacoplar o problema, resultando-se na equação modal genérica:

$$\frac{d^2 q_i(t)}{dt^2} + c \omega_i^2 \frac{dq_i(t)}{dt} + \omega_i^2 q_i(t) = \frac{\int_0^H p(z, t) u_i(z) dz}{m \int_0^H u_i^2(z) dz} \quad (4.42)$$

que consiste na equação de movimento de um grau de liberdade.

Um caso particularmente interessante ocorre para carregamento não variável ao longo da altura, ficando o segundo membro de (4.42):

$$\frac{p(t)}{m} a_m \quad (4.43)$$

onde:

$$a_m = \frac{\int_0^H u_i(z) dz}{\int_0^H u_i^2(z) dz} \quad (4.44)$$

vem a ser o conhecido módulo de forma, o qual varia para o primeiro modo de 0.78 (parede- $\lambda = 0$ ) a 1.3 ( $\lambda \rightarrow \infty$ ), para o segundo e terceiros modos praticamente não varia valendo, respectivamente, 0.42 e 0.25.

## APÊNDICE

### Matriz de Massa Discreta

A Figura A1 ilustra a discretização empregada na formulação via matriz de flexibilidade da vibração livre em apreço, a exemplo da discretização já discutida no Capítulo III, indicando-se as massas concentradas nos nós.

O equilíbrio dinâmico, tendo-se em conta que a força de inércia, segundo o princípio de D'Alembert, tem sentido inverso da aceleração, e o expresso em (A6) do Capítulo III, tem a seguinte escrita:

$$\frac{H^3}{j_f} [F] (-H [M] \{\ddot{u}(z, t)\}) = \{u(z, t)\} \quad (A1)$$

onde a matriz de massa  $[M]$  é diagonal como indica a Figura A1, e a matriz  $[F]$  é a mesma já apresentada no apêndice do Capítulo III, resultando-se na equação de frequências:

$$\frac{H^4}{j_f} [F] ([M] m \omega^2 \{u(z)\}) = \{u(z)\} \quad (\text{A2})$$

correspondendo-se ao problema de autovalor:

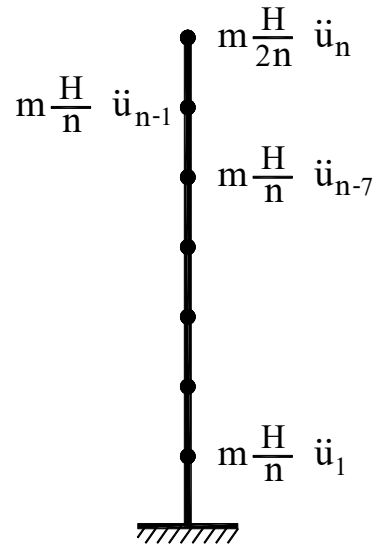


Figura A1

$$\left( [F][M] - \frac{j_f}{H^4 m \omega^2} [I] \right) \{\bar{u}(z)\} = \{0\} \quad (\text{A3})$$

em razão da transformação:

$$\{\bar{u}(z)\} = \frac{H^4 m \omega^2}{j_f} \{u(z)\} \quad (\text{A4})$$

justificando-se, pois, o expresso em (4.36).

## CAPÍTULO V

### ASSOCIAÇÃO TRIDIMENSIONAL DE PAINÉIS

#### 5.1- Associação Tridimensional de Paredes

A Figura 5.1 ilustra em planta uma configuração genérica de associação tridimensional de painéis paredes, indicando-se um sistema global de referência dextrorso (mão direita)  $OXYZ$ , com eixos horizontais  $OX$  e  $OY$  localizados na base do conjunto e o eixo  $OZ$  vertical. A posição de cada parede é caracterizada por um sistema local de referência  $oxz$  localizado na base da parede, com eixo vertical  $oz$  segundo a posição dos centros de gravidade das seções transversais da parede, e eixo horizontal  $ox$  segundo o plano da parede, cujo versor tem componentes  $a_w$  segundo o eixo  $OX$  e  $b_w$  segundo o eixo  $OY$ , bem como a componente  $c_w$  que vem a ser a distância do plano da parede ao eixo  $OZ$ , considerada positiva para momento positivo (sentido horário) do versor em relação ao eixo  $OZ$ , e negativa em caso contrário. O carregamento é suposto distribuído uniformemente na altura e atuando horizontalmente segundo um plano vertical cujo versor, a exemplo do dos painéis, tem componentes  $a_q$ ,  $b_q$  e  $c_q$ .

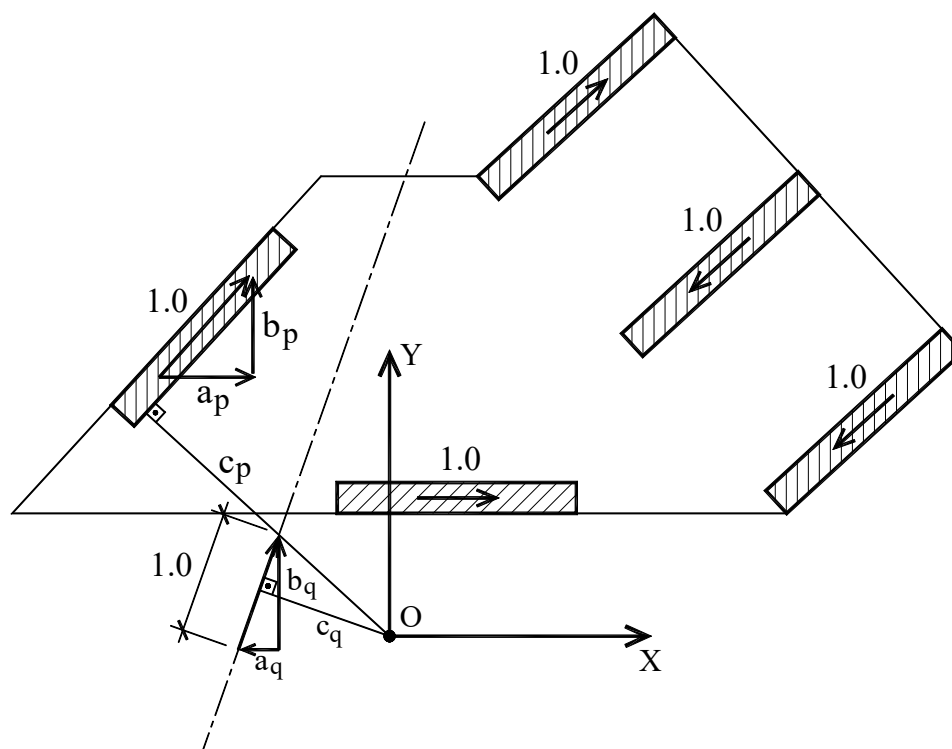


Figura 5.1

A Técnica do Meio Contínuo assume que as paredes são planas e com rigidez transversal desprezível, sendo as lajes dos andares (sistema de pisos)

simuladas por diafragmas horizontais de rigidez nula transversalmente e rígidos no seu plano, e continuamente distribuídos ao longo da vertical.

## 5.2- Relações Básicas

Respeitando a indeformabilidade dos diafragmas em seus planos, a relação entre os movimentos do conjunto e o do painel parede assim se redige:

$$u_w(Z) = a_w U(Z) + b_w V(Z) + c_w W(Z) \quad (5.1)$$

que consiste na superposição da projeção na direção da parede (eixo  $ox$ ) do movimento  $U(Z)$  do conjunto segundo o eixo  $OX$ , projeção naquela direção do movimento  $V(Z)$  segundo o eixo  $OY$ , e mais a contribuição da rotação  $W(Z)$ , supostos movimentos em regime linear (pequenas deslocamentos e rotação). A Teoria Técnica da Flexão permite então expressar, tendo-se em conta (5.1), o esforço cortante na parede mediante a seguinte escrita:

$$V_w(Z) = -j_w \frac{d^3 u_w(Z)}{dZ^3} = -j_w \left( a_w \frac{d^3 U(Z)}{dZ^3} + b_w \frac{d^3 V(Z)}{dZ^3} + c_w \frac{d^3 W(Z)}{dZ^3} \right) \quad (5.2)$$

uma vez que o eixo vertical da parede  $oz$  é paralelo ao eixo vertical  $OZ$  do conjunto, sendo  $j_w$  o produto de inércia da parede. O esforço cortante no conjunto é então dado por:

$$\begin{aligned} V_X(Z) &= \sum_{w=1}^N V_w(Z) a_w \\ V_Y(Z) &= \sum_{w=1}^N V_w(Z) b_w \\ M_Z(Z) &= \sum_{w=1}^N V_w(Z) c_w \end{aligned} \quad (5.3)$$

onde  $N$  é o número de paredes do conjunto tridimensional. Tendo-se em conta (5.2), o expresso em (5.3) permite formular a equação de equilíbrio do conjunto mediante a redação matricial:

$$- \begin{bmatrix} J_{aa} & J_{ab} & J_{ac} \\ J_{ab} & J_{bb} & J_{bc} \\ J_{ac} & J_{bc} & J_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{d^3 U(z)}{dZ^3} \\ \frac{d^3 V(z)}{dZ^3} \\ \frac{d^3 W(z)}{dZ^3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q(H-z)a_q \\ q(H-z)b_q \\ q(H-z)c_q \end{Bmatrix} \quad (5.4)$$

onde:

$$J_{kl} = \sum_{w=1}^N j_w k_w \ell_w \quad (5.5)$$

sendo  $k$  e  $\ell$  qualquer uma das componentes  $a_w$ ,  $b_w$  e  $c_w$ , empregando-se agora a variável  $z$ , visto que o eixo  $OZ$  -e o mesmo que  $Oz$ .

Conforme exposto por Stamato em sua clássica publicação "Associação Contínua de painéis de contraventamento", Publ. N. 157, Esc. Eng, S. Carlos, USP, 1972, a matriz presente em (5.4) pode ser diagonalizada mediante uma escolha adequada do sistema de referência global. A origem desse novo sistema é dada por (Figura 5.2a):

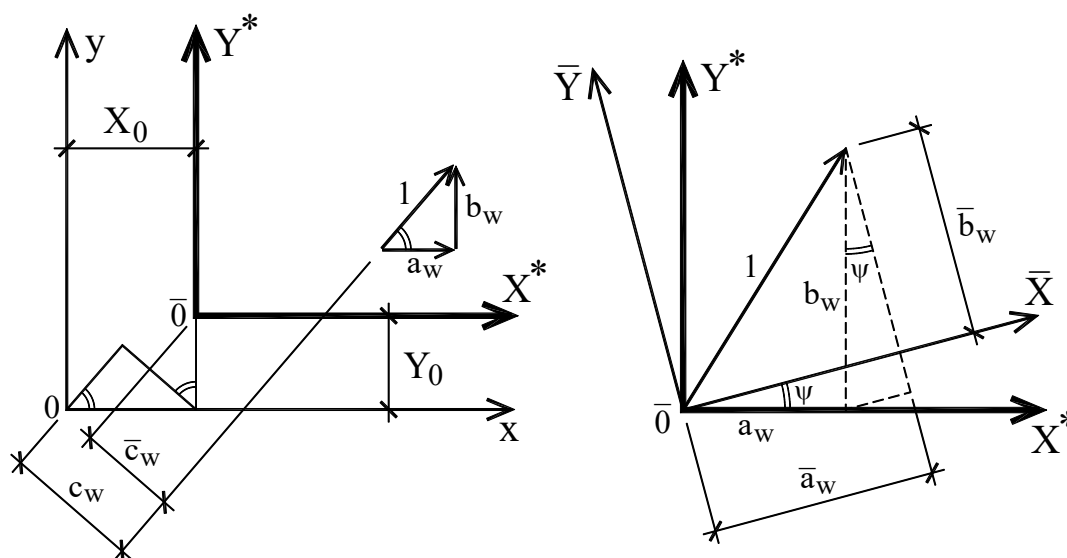


Figura 5.2

$$X_0 = \frac{J_{aa}J_{bc} - J_{ab}J_{ac}}{J_{aa}J_{bb} - J_{ab}J_{ab}} \quad (5.6)$$

$$Y_0 = \frac{-J_{bb}J_{ac} + J_{ab}J_{bc}}{J_{aa}J_{bb} - J_{ab}J_{ab}}$$

e a direção por (Figura 5.2b):

$$2\psi = \text{arc.t.g} \frac{2J_{ab}}{J_{aa} - J_{bb}} \quad (5.7)$$

sendo o ângulo  $\psi$  medido positivamente no sentido anti-horário (sentido dextrorso). A origem expressa em (5.6) torna nulos os elementos  $J_{ac}$  e  $J_{bc}$  e a direção expressa em (5.7) torna nulo o elemento  $J_{ab}$ .

A Figura 5.2a) exhibe uma mudança do sistema de referência original  $OXY$  para o sistema  $\bar{O}X^*Y^*$  cuja nova coordenada  $\bar{c}_w$  passa a ser expressa por:

$$\bar{c}_w^* = c_w - X_0 b_w + Y_0 a_w \quad (5.8)$$

e, nesse novo sistema de referência, as seguintes relações podem ser redigidas:

$$J_{ac}^* = \sum_w j_w a_w \bar{c}_w^* = J_{ac} - X_0 J_{ab} + Y_0 J_{aa} = 0$$

$$J_{bc}^* = \sum_w j_w b_w \bar{c}_w^* = J_{bc} - X_0 J_{bb} + Y_0 J_{ab} = 0 \quad (5.9)$$

cuja solução se expressa em (5.6). Para completar o desacoplamento resta a busca de um novo sistema de referência com essa mesma origem, mas com direção diferente, como ilustra-se na Figura 5.2b), valendo-se as seguintes relações:

$$\begin{aligned}\bar{a}_w &= a_w \cos \psi + b_w \sin \psi \\ \bar{b}_w &= -a_w \sin \psi + b_w \cos \psi\end{aligned}\quad (5.10)$$

ou ainda:

$$\begin{aligned}\bar{a}_w \bar{b}_w &= a_w b_w (\cos^2 \psi - \sin^2 \psi) + (b_w^2 - a_w^2) \sin \psi \cos \psi = \\ &= a_w b_w \cos 2\psi + \frac{b_w^2 - a_w^2}{2} \sin 2\psi\end{aligned}\quad (5.11)$$

resultando-se:

$$J_{\bar{a}\bar{b}} = \sum_w j_w \bar{a}_w \bar{b}_w = J_{ab} \cos 2\psi + \frac{1}{2}(J_{bb} - J_{aa}) \sin 2\psi = 0 \quad (5.12)$$

confirmando-se o exposto em (5.7).

Assim, nesse novo sistema de referência, denominado eixos centrais do conjunto de paredes, as equações de equilíbrio (5.4) se desacoplam e ganham a seguinte redação:

$$\begin{aligned}J_{\bar{a}\bar{a}} \frac{d^3 \bar{U}(Z)}{dZ^3} &= -q(H-Z) \bar{a}_q \\ J_{\bar{b}\bar{b}} \frac{d^3 \bar{V}(Z)}{dZ^3} &= -q(H-Z) \bar{b}_q \\ J_{\bar{c}\bar{c}} \frac{d^3 \bar{W}(Z)}{dZ^3} &= -q(H-Z) \bar{c}_q\end{aligned}\quad (5.13)$$

onde a barra superior indica grandezas segundo o novo sistema de referência, e cuja integração se expressa então como já exposto em (2.4).

### 5.3- Primeiro Exemplo de aplicação

Considere-se o edifício de 20 andares com pé direito de 3m, formado por paredes e tendo em planta a configuração ilustrada na Figura 5.3, onde já se indica a posição do sistema original de referência e a posição do sistema referência central do conjunto de paredes, bem como a posição do plano do carregamento  $q_w = 10 \text{ kN/m}$ , e também as dimensões das paredes e respectivas numerações, resultando-se no sistema de referência original:

$$\begin{aligned}J_{aa} &= 2 \times 4.5 \times 10^6 = 9 \times 10^6 \text{ kNm}^2 \\ J_{bb} &= 2(20.8 \times 10^6 + 4.5 \times 10^6) = 50.6 \times 10^6 \text{ kNm}^2 \\ J_{cc} &= 20.8 \times 10^6 \times 5^2 + 2 \times 4.5 \times 10^6 \times 5^2 - 745 \times 10^6 \text{ kNm}^4 \\ J_{ab} &= 0 \\ J_{ac} &= -4.5 \times 10^6 \times 5 = -22.5 \times 10^6 \text{ kNm}^3 \\ J_{bc} &= 4.5 \times 10^6 \times 5 - 20.8 \times 10^6 \times 5 = -81.5 \times 10^6 \text{ kNm}^3\end{aligned}$$

adotando-se módulo de elasticidade  $E = 10^8 \text{ kN/m}^2$ , ou seja, os eixos centrais tem origem dada por:

$$X_0 = \frac{9 \times 10^6 (-81.5 \times 10^6)}{9 \times 10^6 \times 50.6 \times 10^6} = -1.61 \text{ m}$$

$$Y_0 = \frac{-50.6 \times 10^6 (-22.5 \times 10^6)}{9 \times 10^6 \times 50.6 \times 10^6} = 2.5 \text{ m}$$

e a direção dada por:

$$2\psi = \text{ac.tg.}(0^\circ) = 0 \rightarrow \begin{cases} \psi = 0^\circ \\ \psi = 90^\circ \end{cases}$$

ou seja, a direção é a mesma do sistema original. Assim, no sistema central do conjunto de paredes tem-se então:

$$J_{\bar{a}\bar{a}} = J_{aa} = 9 \times 10^6 \text{ kNm}^2$$

$$J_{\bar{b}\bar{b}} = J_{bb} = 50.6 \times 10^6 \text{ kNm}^2$$

$$J_{\bar{c}\bar{c}} = 10^6 (20.8(3.39^2 + 1.61^2) + 4.5(2 \times 2.5^2 + 1.61^2) + 6.61^2) = 557.5 \times 10^6 \text{ kNm}^4$$

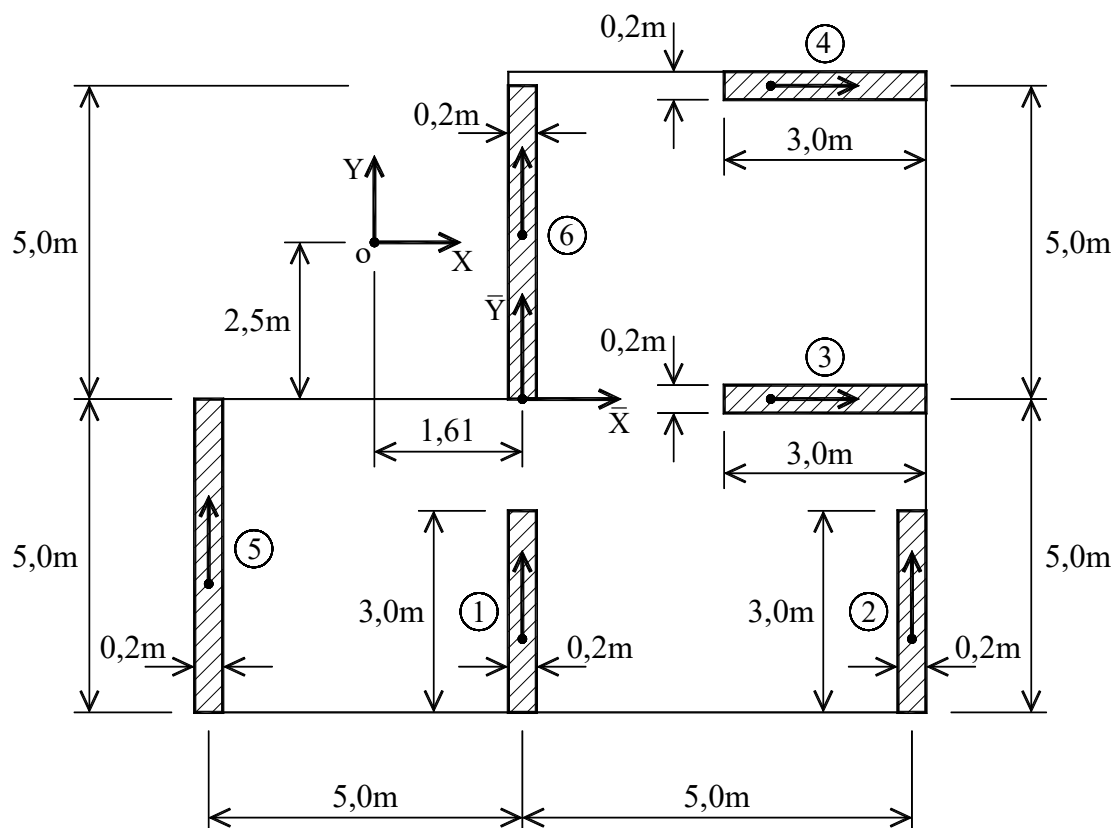


Figura 5.3

resultando-se nas equações:

$$50.6 \times 10^6 \frac{d^3 \bar{V}(Z)}{dZ^3} = -10(60 - z)$$

$$557.5 \times 10^6 \frac{d^3 \bar{W}(Z)}{dZ^3} = -10(60 - z) \times 1.61$$

cuja integração resulta, respectivamente:

$$\bar{V}(z) = \frac{10 \times 60^4}{24 \times 50.6 \times 10^6} \left( \left( \frac{z}{60} \right)^4 - 4 \left( \frac{z}{60} \right)^3 + 6 \left( \frac{z}{60} \right) \right)$$

$$\bar{W}(z) = \frac{10 \times 60^4 \times 1.61}{24 \times 557.5 \times 10^6} \left( \left( \frac{z}{60} \right)^4 - 4 \left( \frac{z}{60} \right)^3 + 6 \left( \frac{z}{60} \right) \right)$$

podendo-se agora serem obtidos os deslocamentos de cada parede por (5.1), o esforço cortante atuante por (5.2) e, e de modo similar o momento fletor via relação momento curvatura.

#### 5.4- Associação Tridimensional de Pórticos sem Deformação Axial das Colunas, Paredes e Núcleos Estruturais

A Figura 5.4 exibe em planta uma associação tridimensional de pórticos, paredes e núcleos estruturais (colunas com seção de paredes delgadas). As coordenadas da posição dos pórticos são similares às das paredes já apresentadas no item anterior. Acrescentam-se agora os núcleos estruturais, cujas contribuições não implicam na alteração das equações envolvidas, como mostrado adiante.

A exemplo da associação tridimensional de paredes, o deslocamento de um painel pórtico genérico é expresso por (vide (5.1))

$$u_f(Z) = a_f U(Z) + b_f V(Z) + c_f W(Z) \quad (5.14)$$

e a equação constitutiva, como exposto em (2.12), tem a seguinte escrita:

$$V_f(Z) = s_f \frac{du_f(Z)}{dZ} - j_f \frac{d^3 u_f(Z)}{dZ^3} \quad (5.15)$$

e o equilíbrio do conjunto, a exemplo do exposto em (5.4), tem a seguinte escrita:

$$- \begin{bmatrix} J_{aa} & J_{ab} & J_{ac} \\ J_{ab} & J_{bb} & J_{bc} \\ J_{ac} & J_{bc} & J_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{d^3 U(z)}{dZ^3} \\ \frac{d^3 V(z)}{dZ^3} \\ \frac{d^3 W(z)}{dZ^3} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} S_{aa} & S_{ab} & S_{ac} \\ S_{ab} & S_{bb} & S_{bc} \\ S_{ac} & S_{bc} & S_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{dU(z)}{dZ} \\ \frac{dV(z)}{dZ} \\ \frac{dW(z)}{dZ} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q(H-z)a_q \\ q(H-z)b_q \\ q(H-z)c_q \end{Bmatrix} \quad (5.16)$$



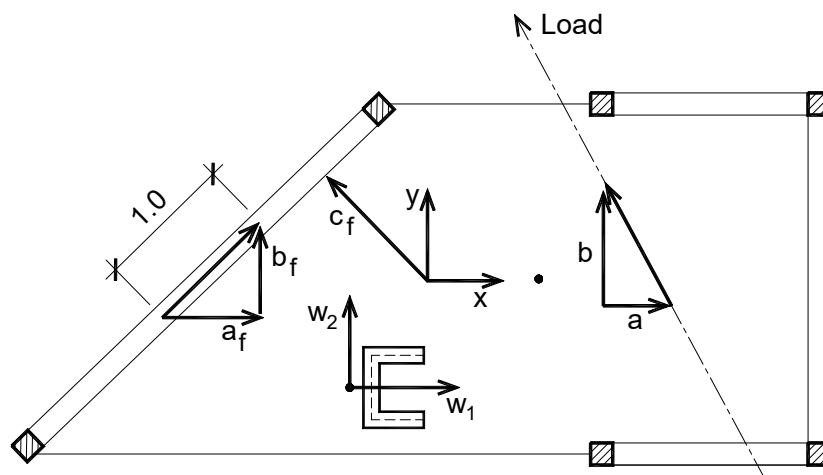


Figura 5.4

Onde, por comodidade, a variável segundo a vertical é agora representada apenas por letra minúscula, e:

$$J_{kl} = \sum_{f=1}^N j_f k_f l_f + \sum_{w=1}^M j_w k_w l_w + \sum_{\omega=1}^T J_{\omega} \quad (5.17)$$

$$S_{kl} = \sum_{f=1}^N s_f k_f l_f + \sum_{t=1}^T j_t$$

sendo  $N$  o número de pórticos,  $M$  o número de paredes,  $T$  o número de núcleos estruturais,  $j_{\omega} = EJ_{\omega}$  o produto de inércia da flexo-torção e  $j_t = GJ_t$  o produto de inércia da torção livre de Saint Venant. O exposto em (5.17) leva em conta o fato narrado na Figura 5.5, a qual ilustra que o núcleo estrutural pode ser representado por duas paredes perpendiculares a serem consideradas no conjunto de paredes, com as inércias respectivas do núcleo estrutural, posicionadas com seus centros de gravidade segundo o centro de torção do núcleo estrutural, mais uma mola de torção contemplando a rigidez à torção da flexo-torção, acrescida da rigidez à torção livre de Saint-Venant. Em apêndice são apresentadas a rigidez à flexo-torção e da torção livre de Saint Venant para dois núcleos estruturais mais comuns, bem como indicadas referências onde são encontradas tabelas contendo tais parâmetros para um grande número de formatos de núcleos.

A integração expedita de (5.16) pode ser formulada mediante os seguintes procedimentos. Em primeiro lugar procede-se a diagonalização da matriz do conjunto de paredes, a exemplo do apresentado no item anterior, ganhando (5.16) a seguinte redação:

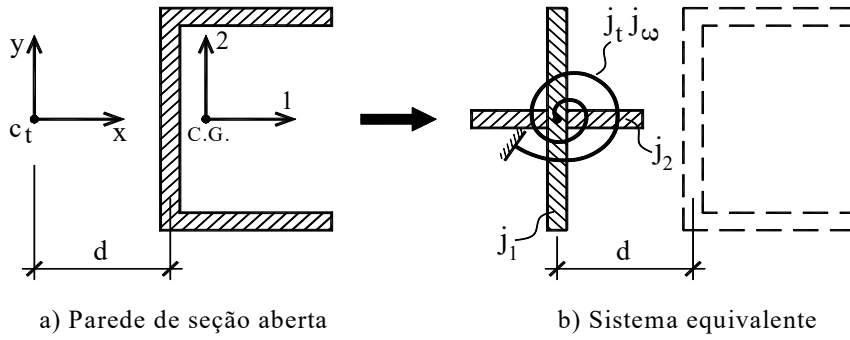


Figura 5.5

$$-\begin{bmatrix} J_{aa} & 0 & 0 \\ 0 & J_{bb} & 0 \\ 0 & 0 & J_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{d^3 \bar{U}(z)}{dZ^3} \\ \frac{d^3 \bar{V}(z)}{dZ^3} \\ \frac{d^3 \bar{W}(z)}{dZ^3} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} S_{aa} & S_{ab} & S_{ac} \\ S_{ab} & S_{bb} & S_{bc} \\ S_{ac} & S_{bc} & S_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{d\bar{U}(z)}{dZ} \\ \frac{d\bar{V}(z)}{dZ} \\ \frac{d\bar{W}(z)}{dZ} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q(H-z)\bar{a}_q \\ q(H-z)\bar{b}_q \\ q(H-z)\bar{c}_q \end{Bmatrix} \quad (5.18)$$

onde a barra superior indica as variáveis agora segundo o novo sistema de referência, que desacopla o conjunto de paredes. Procedendo-se agora a transformação de variáveis:

$$\begin{Bmatrix} \bar{U}(z) \\ \bar{V}(z) \\ \bar{W}(z) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{J_{aa}} & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{J_{bb}} & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{J_{cc}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U^*(z) \\ V^*(z) \\ W^*(z) \end{Bmatrix} \quad (5.19)$$

uma nova redação para o expresso em (5.13) pode ser formulada, ou seja:

$$-\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{d^3 U^*(z)}{dZ^3} \\ \frac{d^3 V^*(z)}{dZ^3} \\ \frac{d^3 W^*(z)}{dZ^3} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{S_{aa}}{J_{aa}} & \frac{S_{ab}}{\sqrt{J_{aa}J_{bb}}} & \frac{S_{ac}}{\sqrt{J_{aa}J_{cc}}} \\ \frac{S_{ab}}{\sqrt{J_{aa}J_{bb}}} & \frac{S_{bb}}{J_{bb}} & \frac{S_{bc}}{\sqrt{J_{bb}J_{cc}}} \\ \frac{S_{ac}}{\sqrt{J_{aa}J_{cc}}} & \frac{S_{bc}}{\sqrt{J_{bb}J_{cc}}} & \frac{S_{cc}}{J_{cc}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{dU^*(z)}{dZ} \\ \frac{dV^*(z)}{dZ} \\ \frac{dW^*(z)}{dZ} \end{Bmatrix} = q(H-z) \begin{Bmatrix} \frac{\bar{a}_q}{\sqrt{J_{aa}}} \\ \frac{\bar{b}_q}{\sqrt{J_{bb}}} \\ \frac{\bar{c}_q}{\sqrt{J_{cc}}} \end{Bmatrix} \quad (5.20)$$

notando-se que se pré-multiplica o equilíbrio resultante nessa nova variável pela matriz de (5.19)

Para desacoplar o expresso em (5.20), cabe agora proceder a decomposição de Jordam da matriz ainda acoplado o sistema, como exposta no apêndice. Para tanto, a equação característica do problema de autovalor daquela matriz assim se escreve:

$$\sigma^3 + a^* \sigma^2 + b^* \sigma + c^* = 0 \quad (5.21)$$

onde

$$\begin{aligned}
a^* &= -\left(\frac{S_{aa}}{J_{aa}} + \frac{S_{bb}}{J_{bb}} + \frac{S_{cc}}{J_{cc}}\right) \\
b^* &= \frac{S_{aa}S_{bb}}{J_{aa}J_{bb}} + \frac{S_{aa}S_{cc}}{J_{aa}J_{cc}} + \frac{S_{bb}S_{cc}}{J_{bb}J_{cc}} - \frac{S_{ac}^2}{J_{aa}J_{cc}} - \frac{S_{bc}^2}{J_{bb}J_{cc}} - \frac{S_{ab}^2}{J_{aa}J_{bb}} \\
c^* &= \frac{S_{ac}^2S_{bb}}{J_{aa}J_{bb}J_{cc}} + \frac{S_{bc}^2S_{aa}}{J_{aa}J_{bb}J_{cc}} + \frac{S_{ab}^2S_{cc}}{J_{aa}J_{bb}J_{cc}} - \frac{S_{aa}S_{bb}S_{cc}}{J_{aa}J_{bb}J_{cc}} - 2\frac{S_{ab}S_{bc}S_{ac}}{J_{aa}J_{bb}J_{cc}}
\end{aligned} \tag{5.22}$$

cujas raízes são reais em razão da simetria da matriz em questão, e expressas pelas fórmulas de Cardam:

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= 2\sqrt[3]{\rho} \cos(\alpha/3) - a^*/3 \\
\sigma_2 &= 2\sqrt[3]{\rho} \cos((2\pi - \alpha)/3) - a^*/3 \\
\sigma_3 &= 2\sqrt[3]{\rho} \cos((2\pi + \alpha)/3) - a^*/3
\end{aligned} \tag{5.23}$$

onde:

$$\begin{aligned}
\rho &= \sqrt{R^2 + Q^2} = \sqrt{\frac{1}{27} \left[ \frac{(a^*)^2}{3} - b^* \right]^3} \\
\alpha &= \arccos\left(\frac{R}{\rho}\right)
\end{aligned} \tag{5.24}$$

sendo:

$$\begin{aligned}
R &= \frac{1}{2} \left( \frac{b^* a^*}{3} - c^* - \frac{2(a^*)^3}{27} \right) \\
Q &= \sqrt{\frac{1}{27} \left( \frac{(a^*)^2}{3} - b^* \right)^3 - R^2}
\end{aligned} \tag{5.25}$$

Por outro lado, os correspondentes autovetores são expressos por:

$$\begin{Bmatrix} \ell \\ \mathbf{m} \\ \mathbf{n} \end{Bmatrix}_i = \begin{Bmatrix} \gamma_i / \sqrt{\gamma_i^2 + \delta_i^2 + 1} \\ \delta_i / \sqrt{\gamma_i^2 + \delta_i^2 + 1} \\ 1 / \sqrt{\gamma_i^2 + \delta_i^2 + 1} \end{Bmatrix} \tag{5.26}$$

onde

$$\begin{aligned}
\gamma_i &= \frac{(S_{bb}^* - \sigma_i)(S_{cc}^* - \sigma_i) - (S_{bc}^*)^2}{S_{ab}^* S_{bc}^* - S_{ac}^* (S_{bb}^* - \sigma_i)} \\
\delta_i &= \frac{S_{ab}^* (\sigma_i - S_{cc}^*) + S_{ac}^* S_{bc}^*}{S_{ab}^* S_{bc}^* - S_{ac}^* (S_{bb}^* - \sigma_i)}
\end{aligned} \tag{5.27}$$

nas quais:

$$\begin{aligned}
S_{bc}^* &= S_{bc} / \sqrt{J_{bb} J_{cc}} \\
S_{bb}^* &= S_{bb} / J_{bb} \\
S_{cc}^* &= S_{cc} / J_{cc} \\
S_{ac}^* &= S_{ac} / \sqrt{J_{aa} J_{cc}}
\end{aligned} \tag{5.28}$$

registrando-se que os autovetores não são nesse caso versores.

Finalmente, a última transformação de variáveis se expressa:

$$\begin{Bmatrix} U^*(z) \\ V^*(z) \\ W^*(z) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \ell \\ m \\ n \end{matrix} \right\}_1 \\ \left\{ \begin{matrix} \ell \\ m \\ n \end{matrix} \right\}_2 \\ \left\{ \begin{matrix} \ell \\ m \\ n \end{matrix} \right\}_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U(z) \\ V(z) \\ W(z) \end{Bmatrix}_2 \tag{5.29}$$

sendo as colunas da matriz de transformação os autovetores dados em (5.26), e assim, em razão da ortogonalidade dos autovetores em razão a simetria da matriz acoplando o sistema de equações em (5.20), tendo-se em conta o exposto em (5.29), o exposto em (5.20) ganha a seguinte escrita:

$$-\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U(z) \\ V(z) \\ W(z) \end{Bmatrix}_2^{\text{III}} + \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U(z) \\ V(z) \\ W(z) \end{Bmatrix}_2^{\text{I}} = q(H-z) \begin{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \ell & m & n \end{matrix} \right\}_1 \\ \left\{ \begin{matrix} \ell & m & n \end{matrix} \right\}_2 \\ \left\{ \begin{matrix} \ell & m & n \end{matrix} \right\}_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{a}_q / \sqrt{J_{aa}} \\ \bar{b}_q / \sqrt{J_{bb}} \\ \bar{c}_q / \sqrt{J_{cc}} \end{Bmatrix} \tag{5.30}$$

resultando-se em equações desacopladas do tipo:

$$-\varphi_i^{\text{III}}(z) + \sigma_i \varphi_i^{\text{I}}(z) = V_i(z) \tag{5.31}$$

onde:

$$V_i(z) = q(H-z) \left( \ell_i \bar{a}_q / \sqrt{J_{aa}} + m_i \bar{b}_q / \sqrt{J_{bb}} + n_i \bar{c}_q / \sqrt{J_{cc}} \right) \tag{5.32}$$

cuja integração, a exemplo de (2.21), resulta:

$$\begin{aligned}
\varphi_i(z) &= \frac{q}{\sigma_i^2} \left( \ell_i \bar{a}_q / \sqrt{J_{aa}} + m_i \bar{b}_q / \sqrt{J_{bb}} + n_i \bar{c}_q / \sqrt{J_{cc}} \right) \\
&\left( \frac{1 - \sqrt{\sigma_i} \text{He}^{-\sqrt{\sigma_i} H}}{2 \coth(\sqrt{\sigma_i} H)} e^{\sqrt{\sigma_i} z} + \frac{1 + \sqrt{\sigma_i} \text{He}^{\sqrt{\sigma_i} H}}{2 \coth(\sqrt{\sigma_i} H)} e^{-\sqrt{\sigma_i} z} - \frac{1 + \sqrt{\sigma_i} \text{Hsech}(\sqrt{\sigma_i} H)}{\coth(\sqrt{\sigma_i} H)} - \frac{\sigma_i z^2}{2} + \sigma_i H z \right) \tag{5.33}
\end{aligned}$$

e a solução de (5.18) ganha então a seguinte redação:

$$\begin{Bmatrix} \bar{U}(z) \\ \bar{V}(z) \\ \bar{W}(z) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{J_{aa}} & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{J_{bb}} & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{J_{cc}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \ell \\ m \\ n \end{matrix} \right\}_1 \\ \left\{ \begin{matrix} \ell \\ m \\ n \end{matrix} \right\}_2 \\ \left\{ \begin{matrix} \ell \\ m \\ n \end{matrix} \right\}_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_1(z) \\ \varphi_2(z) \\ \varphi_3(z) \end{Bmatrix} \tag{5.34}$$

que consiste na expressão resultante das transformações de variáveis adotadas. Devendo-se notar que a equação de equilíbrio (5.30) expressa, nas novas variáveis da transformação expressa em (5.29), mediante pré-multiplicada pela transposta da matriz de (5.29).

### 5.5- Associação Tridimensional de Pórticos com Deformação Axial das Colunas

Nesse caso, incluir paredes e núcleos estruturais na associação não é conveniente, pois o grau de liberdade correspondente à deformação axial da coluna acaba criando um acoplamento, tornando-se as relações matemáticas de difícil manipulação, sem contar que dada a grande rigidez das paredes e núcleo faz com que a deformação axial das colunas, de pequena monta, não influí significativamente no comportamento do conjunto.

Tendo-se em conta a deformação das colunas do pórtico, o equilíbrio de cada pórtico isolado se escreve:

$$j_f \frac{d^5 u_f(z)}{dz^4} - s_f \mu_f^2 \frac{d^3 u_f(z)}{dz^2} + \frac{\bar{s}_f}{\bar{K}_0} (-V_f(z)) - \frac{d}{dz} q_f(z) = 0 \quad (5.35)$$

que vem a ser a derivada do exposto em (2.32), já tendo-se em conta o parâmetro médio  $\bar{s}_f / \bar{K}_0$ , a exemplo do exposto em (2.46). Além disso, tendo em conta o exposto em (5.14) e a consideração (2.47), o equilíbrio do conjunto ganha a seguinte redação:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} J_{aa} & J_{ab} & J_{ac} \\ J_{ab} & J_{bb} & J_{bc} \\ J_{ac} & J_{bc} & J_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{d^5 U(z)}{dZ^5} \\ \frac{d^5 V(z)}{dZ^5} \\ \frac{d^5 W(z)}{dZ^5} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} S_{aa} & S_{ab} & S_{ac} \\ S_{ab} & S_{bb} & S_{bc} \\ S_{ac} & S_{bc} & S_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{d^3 U(z)}{dZ^3} \\ \frac{d^3 V(z)}{dZ^3} \\ \frac{d^3 W(z)}{dZ^3} \end{Bmatrix} = \\ & \frac{\bar{s}_f}{\bar{K}_0} q(H-z) \begin{Bmatrix} \bar{a}_q \\ \bar{b}_q \\ \bar{c}_q \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (5.36)$$

uma vez que:

$$\begin{aligned} \sum_{f=1}^N V_f(z) a_f &= V_X(z) \rightarrow \sum_{f=1}^N q_f(z) a_f = q \bar{a}_q \\ \sum_{f=1}^N V_f(z) b_f &= V_Y(z) \rightarrow \sum_{f=1}^N q_f(z) b_f = q \bar{b}_q \\ \sum_{f=1}^N V_f(z) c_f &= T_Z(z) \rightarrow \sum_{f=1}^N q_f(z) c_f = q \bar{c}_q \end{aligned} \quad (5.37)$$

sendo  $T_Z$  a torção aplicada, e tendo-se em conta que a derivada da carga distribuída é nula. É oportuno assinalar que a rigidez de cada pórtico ao cisalhamento acha-se agora majorada pelo parâmetro  $\mu_f^2$ .

Procedendo-se o desacoplamento de (5.36) de modo similar ao desenvolvido no item anterior tem-se:

$$-\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U(z) \\ V(z) \\ W(z) \end{Bmatrix}_2^V + \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U(z) \\ V(z) \\ W(z) \end{Bmatrix}_2^{\text{III}} = \frac{\bar{S}_f}{\bar{K}_0} q(H-z) \begin{Bmatrix} \{\ell \ m \ n\}_1 \\ \{\ell \ m \ n\}_2 \\ \{\ell \ m \ n\}_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{a}_q / \sqrt{J_{aa}} \\ \bar{b}_q / \sqrt{J_{bb}} \\ \bar{c}_q / \sqrt{J_{cc}} \end{Bmatrix} \quad (5.38)$$

cuja integração deve atender, além das condições de contorno ilustradas em (2.35) também a condição:

$$u_f^{\text{IV}}(z=H) - \frac{S_f}{J_f} u_f^{\text{II}}(z=H) = \frac{q_f}{J_f} \quad (5.39)$$

uma vez que (5.35) é a derivada de (2.32) e o momento fletor é nulo no topo. De qualquer modo, a solução (2.36) continua válida como integração de (5.35).

As equações desacopladas (5.38) são do tipo:

$$-\varphi_i^{\text{V}}(z) + \sigma_i \varphi_i^{\text{III}}(z) = V_i(z) \quad (5.40)$$

onde:

$$V_i(z) = \frac{\bar{S}_f}{\bar{K}_0} q(H-z) \{\ell \ m \ n\}_i \begin{Bmatrix} \bar{a}_q / \sqrt{J_{aa}} \\ \bar{b}_q / \sqrt{J_{bb}} \\ \bar{c}_q / \sqrt{J_{cc}} \end{Bmatrix} \quad (5.41)$$

cuja integração é similar ao exposto em (2.36). Em verdade, o emprego de (5.30) evitou a consideração de um equilíbrio de momento estranho no tocante à torção, embora a consistência matemática não teria sido violada. Assim sendo a integração de (5.40) se expressa:

$$\varphi_i(z) = \frac{q}{\sigma_i^2} \left( \ell_i \bar{a}_q / \sqrt{J_{aa}} + m_i \bar{b}_q / \sqrt{J_{bb}} + n_i \bar{c}_q / \sqrt{J_{cc}} \right) \left[ A_{1i} e^{\sqrt{\sigma_i} z} + A_{2i} e^{-\sqrt{\sigma_i} z} + \frac{z^2}{2} \left( -\sigma_i + \lambda_0 \left( \frac{\sigma_i}{2} + \frac{1}{H^2} \right) \right) - \frac{\lambda_0 \sigma_i z^3}{6H} + \frac{\lambda_0 \sigma_i z^4}{24H^2} \right] \left[ (-A_{1i} + A_{2i}) \sqrt{\sigma_i} z - A_{1i} - A_{2i} \right] \quad (5.42)$$

e os deslocamentos como expressos em (5.34).

## 5.6- Segundo Exemplo de Aplicação

A Figura 5.6 exibe a configuração em planta da estrutura aportricada de 12 andares, típica de um edifício de duas habitações por andar, com pé direito de 3m e altura total de 36m. O módulo de elasticidade para vigas e colunas vale 2500 kN/cm<sup>2</sup>.

A Figura 5.7 exibe uma visão tridimensional da estrutura em apreço.

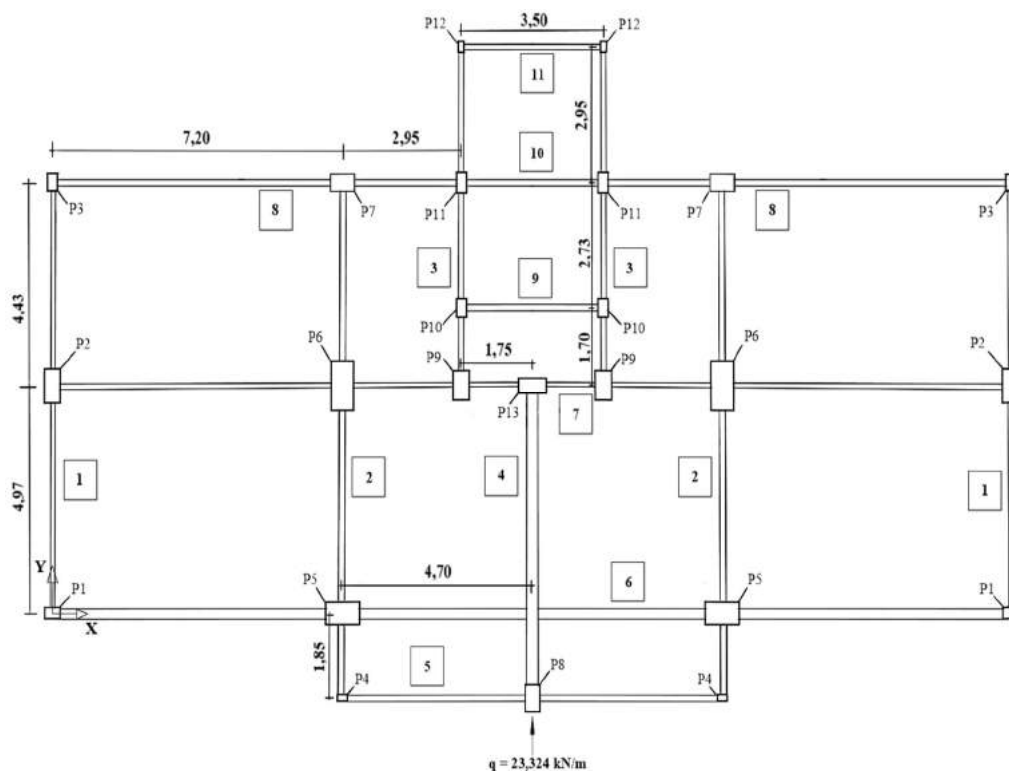


Figura 5.6

Ao todo, são 13 colunas diferentes, como sinalizadas na Figura 5.6, cujas seções transversais acham-se indicadas na Tabela 5.1. No total são 24 colunas. Os pórticos planos, com vigas de seção 12cmx50cm, acham-se numerados com numeração dentro de pequenos retângulos. Ao todo são 10 pórticos planos diferentes. O carregamento é constituído de uma carga uniformemente distribuída de  $q_w = 0,2332 \text{ kN/cm}$  aplicada no centro da face maior do edifício segundo o eixo OY, eixo de referência indicado no canto esquerdo baixo da Figura 5.6.

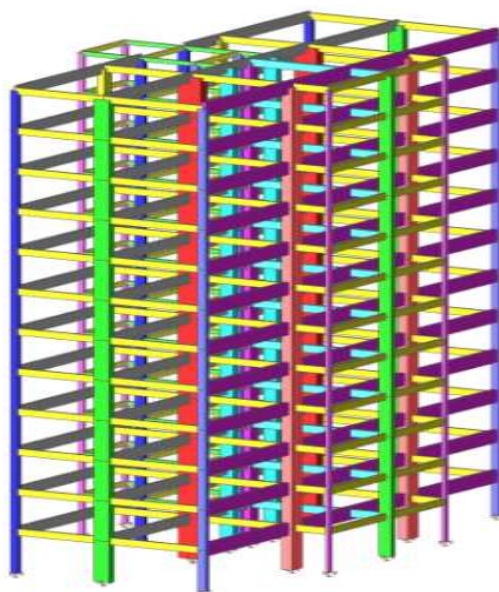


Figura 5.7

Tabela 5.1 – Seções Transversais dos Pilares

Pilar	Seção Transversal (cm x cm)
P1	25 x 40
P2	40 x 75
P3	25 x 35
P4	15 x 25
P5	50 x 85
P6	55 x 110
P7	35 x 60
P8	30 x 60
P9	40 x 65
P10	25 x 40
P11	25 x 45
P12	15 x 25
P13	35 x 65

Cumprе esclarecer inicialmente que será examinado o caso no qual se considera a flexão global das colunas, bem como a deformação axial, que consiste no caso mais geral contemplando também, como caso particular, o caso no qual se negligencia a deformação axial das colunas. Com os dados apresentados, o expresso na primeira e segunda da (2.15) aplicado para o pórtico 1 resulta:



$$P_1 \rightarrow k_{c1} = \frac{40 \times 25^3}{12 \times 300} = 173.6$$

$$P_2 \rightarrow k_{c2} = \frac{40 \times 75^3}{12 \times 300} = 4687.5$$

$$P_3 \rightarrow k_{c3} = \frac{25 \times 35^3}{12 \times 300} = 297.7$$

$$V_1 \rightarrow k_{v1} = \frac{12 \times 50^3}{12 \times 497} = 251.5$$

$$V_2 \rightarrow k_{v1} = \frac{12 \times 50^3}{12 \times 443} = 282.2$$

$$s_{f1} = \left( \frac{12 \times 2500}{300} \right) \left[ \begin{array}{l} 173.6 \frac{251.5}{2 \times 173.6 + 251.5} + 4687.5 \frac{251.5 + 282.2}{2 \times 4687.5 + 251.5 + 282.2} + \\ 297.7 \frac{282.2}{2 \times 297.7 + 282.2} \end{array} \right] =$$

$$42112.8 \text{ kN}$$

$$j_{f1} = 2500 \times 300 \left( \begin{array}{l} 52083.3 \frac{2 \times 173.6}{2 \times 173.6 + 251.5} + 1406250.0 \frac{2 \times 4687.5}{2 \times 4687.5 + 251.5 + 282.2} + \\ 89322.9 \frac{2 \times 297.7}{2 \times 297.7 + 282.2} \end{array} \right)$$

$$= 0.355 \times 10^{10} \text{ kNcm}^2$$

$$K_{01} = 2500 \left( 1000 \frac{940^2}{2} \right) = 1.105 \times 10^{12} \text{ kNcm}^2$$

$$\mu_1^2 = 1 + \frac{0.387 \times 10^{10}}{1.1045 \times 10^{12}} = 1.0035$$

Procedendo-se de modo análogo para os demais pórticos, os resultados acham-se arrolados nas Tabelas 5.2 e 5.3, indicando-se entre parêntesis, na Tabela 5.2 os dados do pórtico simétrico.

A equação de equilíbrio do conjunto ganha então, como exposto em (5.16), a seguinte redação matricial:

$$-10^{10} \begin{bmatrix} 2.26 & 0 & -693.1984 \\ 0 & 4.939 & 5877.41 \\ -693.1984 & 5877.41 & 9.93 \times 10^6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}^V + 10^6 \begin{bmatrix} 1.116 & 0 & -424.654 \\ 0 & 0.3427 & 407.8 \\ -424.654 & 407.8 & 9.322 \times 10^5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}^{\text{III}}$$

$$= \frac{\bar{s}_f}{\bar{K}_0} 0.23324(3600 - z) \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1190 \end{Bmatrix}$$

onde o nível de derivação é indicado por numeral romano.

Tabela 5.2

Pórtico	$a_f$	$b_f$	$c_f$ cm	$s_f$ kN	$j_w$ kNcm <sup>2</sup>
1	0	1	0 (2380)	42112	$0.355 \times 10^{10}$
2	0	1	720(1660)	80380	$1.740 \times 10^{10}$
3	0	1	1015(1365)	28689	$0.293 \times 10^{10}$
4	0	1	1190	40033	$0.163 \times 10^{10}$
5	1	0	-185	25454	$0.0244 \times 10^{10}$
6	1	0	0	402121	$1.040 \times 10^{10}$
7	1	0	497	487249	$0.952 \times 10^{10}$
8	1	0	940	190240	$0.224 \times 10^{10}$
9	1	0	667	9055	$0.0192 \times 10^{10}$
10	1	0	1235	1695	$0.000973 \times 10^{10}$

Tabela 5.3

Pórtico	$\mu^2$	$s_f \mu^2$ kN	$K_0$ kNcm <sup>2</sup>	$s_f / K_0$ cm <sup>-2</sup>
1	1.0035	42260	$1.105 \times 10^{12}$	$381 \times 10^{-10}$
2	1.0000	80380	$1.851 \times 10^{15}$	$0.43 \times 10^{-10}$
3	1.0000	28689	$1.03 \times 10^{15}$	$0.28 \times 10^{-10}$
4	1.0000	40033	$2.41 \times 10^{15}$	$0.17 \times 10^{-10}$
5	1.0011	25482	$0.41 \times 10^{12}$	$615 \times 10^{-10}$
6	1.0002	402201	$7.07 \times 10^{12}$	$568 \times 10^{-10}$
7	1.0006	487541	$21.2 \times 10^{12}$	$229 \times 10^{-10}$
8	1.0005	190335	$7.07 \times 10^{12}$	$329 \times 10^{-10}$
9	1.0017	9070	$1.53 \times 10^{11}$	$591 \times 10^{-10}$
10	1.0006	1696	$0.57 \times 10^{11}$	$295 \times 10^{-10}$

O desacoplamento da primeira matriz obtém-se mudando-se a origem do sistema de referência como exposto em (5.6) para:

$$X_0 = \frac{2.26 \times 10^{10} \times 5877.41 \times 10^{10}}{2.26 \times 10^{10} \times 4.939 \times 10^{10}} = 1190 \text{ cm}$$

$$Y_0 = \frac{-4.939 \times 10^{10} \times (-693.1984 \times 10^{10})}{2.26 \times 10^{10} \times 4.939 \times 10^{10}} = 306,725 \text{ cm}$$

e, nesse novo sistema de referência, o equilíbrio do conjunto, a exemplo de (5.18), fica então redigido por:

$$\begin{aligned}
& -10^{10} \begin{bmatrix} 2.26 & 0 & 0 \\ 0 & 4.939 & 0 \\ 0 & 0 & 20.23 \times 10^6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \end{Bmatrix}^V + 10^6 \begin{bmatrix} 1.116 & 0 & -82.248 \\ 0 & 0.3427 & 0 \\ -82.248 & 0 & 29,758 \times 10^4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \end{Bmatrix}^{\text{III}} \\
& = \frac{\bar{S}_f}{\bar{K}_0} 0.23324(3600 - z) \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}
\end{aligned}$$

ou ainda, como em (5.20):

$$\begin{aligned}
& - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^* \\ v^* \\ w^* \end{Bmatrix}^V + 10^{-6} \begin{bmatrix} 49.38 & 0 & -3.8466 \\ 0 & 6.9386 & 0 \\ -3.8466 & 0 & 14.7098 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^* \\ v^* \\ w^* \end{Bmatrix}^{\text{III}} \\
& = \frac{\bar{S}_f}{\bar{K}_0} 0.23324(3600 - z) \begin{Bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{4.939 \times 10^{10}} \\ 0 \end{Bmatrix}
\end{aligned}$$

já o desacoplamento da matriz ainda acoplada obtém-se mediante a decomposição de Jordam com a seguinte equação característica:

$$\sigma^3 - 71.0284\sigma^2 + 1156.2667\sigma - 4937.323 = 0$$

cujas raízes e autovetores correspondentes são:

$$\sigma_1 = 49.801 \times 10^{-6} \rightarrow \begin{Bmatrix} -0.9940 \\ 0 \\ 0.1090 \end{Bmatrix}_1$$

$$\sigma_2 = 6.9386 \times 10^{-6} \rightarrow \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}_2$$

$$\sigma_3 = 14.288 \times 10^{-6} \rightarrow \begin{Bmatrix} 0.1090 \\ 0 \\ 0.9940 \end{Bmatrix}_3$$

resultando-se, como exposto em (5.30), na equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
& - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U(z) \\ V(z) \\ W(z) \end{Bmatrix}^{\text{III}} + \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U(z) \\ V(z) \\ W(z) \end{Bmatrix}^I \\
& = \frac{\bar{S}_f}{\bar{K}_0} 0.23324(3600 - z) \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}_2 \begin{Bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{4.939 \times 10^{10}} \\ 0 \end{Bmatrix}
\end{aligned}$$

e, finalmente, na equação desacoplada:

$$-V_2^{\text{III}}(z) + \sigma_1 V_2^{\text{I}}(z) = \frac{\bar{s}_f}{\bar{K}_0} 0.23324(3600 - z) \frac{1}{\sqrt{4.939 \times 10^{10}}}$$

cuja integração, tendo-se em vista (5.33) e (5.34), resulta:

$$\bar{V}(z) = \frac{0.23324}{(\sigma_2)^2} \frac{1}{4.930 \times 10^{10}} \left[ \begin{array}{l} A_1 e^{\sqrt{\sigma_2} z} + A_2 e^{-\sqrt{\sigma_2} z} + \\ z^2 \left( -\frac{\sigma_2}{2} + \frac{\lambda_0}{2} \left( \frac{\sigma_2}{2} + \frac{1}{3600^2} \right) \right) - \frac{\lambda_0 \sigma_2 z^3}{6 \times 3600} + \frac{\lambda_0 \sigma_2 z^4}{24 \times 3600^2} \\ (-A_1 + A_2) \sqrt{\sigma_2} z - A_1 - A_2 \end{array} \right]$$

onde

$$A_1 = \frac{1}{2 \cosh(\lambda)} \left[ 1 - \frac{\lambda_0}{\lambda^2} + \left( -\lambda + \frac{\lambda_0}{\lambda} \right) e^{-\lambda} \right]$$

$$A_2 = \frac{1}{2 \cosh(\lambda)} \left[ 1 - \frac{\lambda_0}{\lambda^2} + \left( \lambda - \frac{\lambda_0}{\lambda} \right) e^{\lambda} \right]$$

$$\lambda = 3600 \sqrt{\sigma_2} = 9.483$$

$$\lambda_0 = 3600^2 \frac{\bar{s}_f}{\bar{K}_0}$$

cujos resultados acham-se lançados nos gráficos da Figura 5.7.

Vale assinalar que, para esse edifício, a simetria do conjunto desacopla de início o movimento em questão. Todavia, tal fato não foi levado em conta visando-se mostrar toda a marcha de cálculo.

As Figuras de 5.7 a 5.9 exibem os resultados obtidos pelo programa Ansys em cor verde, os resultados levando-se em conta a flexão global das colunas em cor vermelha, bem como o resultado negligenciando-se a flexão global das colunas, ou seja, o resultado do chamado modelo de pórtico puro. Completando-se, a comparação do esforço cortante é apresentada nos gráficos das Figuras 5.8 e 5.9.

O deslocamento em centímetro no topo do edifício em apreço tem a seguinte redação:

$$\bar{V}(z = 3600) = 3.5851 + 1.1525 \lambda_0 = 3.5851 + 1.4036 \times 10^7 \frac{\bar{s}_f}{\bar{K}_0}$$

resultando-se flecha no topo de 3.953cm para  $\bar{s}_f / \bar{K}_0 = 262 \times 10^{-10} \text{ cm}^{-2}$ , que vem a ser o valor médio para o edifício como um todo e 3.778cm para o valor médio levando-se em conta apenas os pórticos envolvidos no movimento em questão, mostrando-se que a contribuição do movimento axial varia algo como de 4% a 10% nesse caso. Além disso é de assinalar que o resultado obtido com o modelo

Murashev resulta em flecha de 3.566cm, não divergindo apreciavelmente do resultado obtido.

Figura 5.7 – Deslocamento do Pórtico 1 do edifício

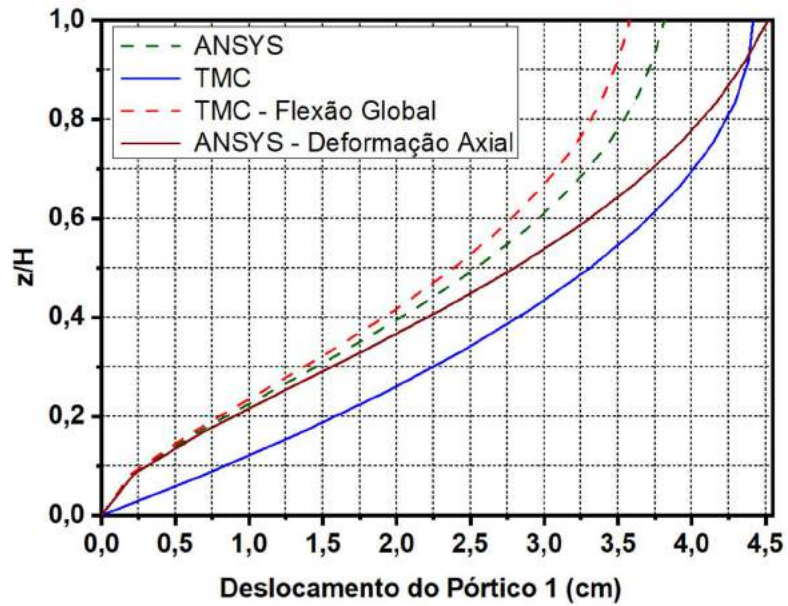


Figura 5.8

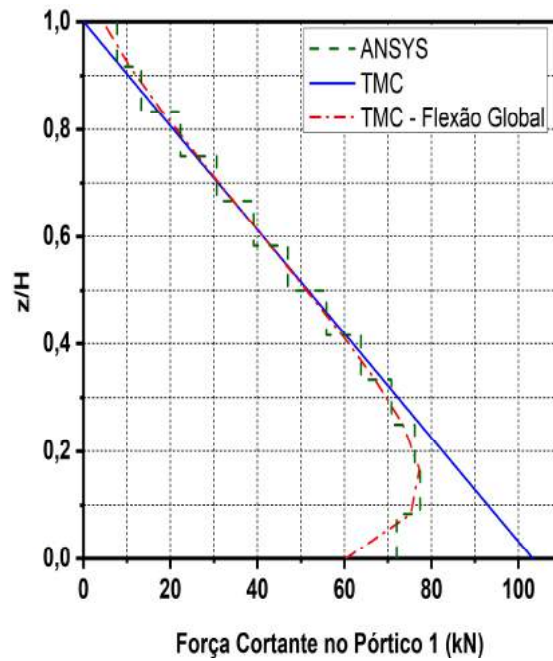
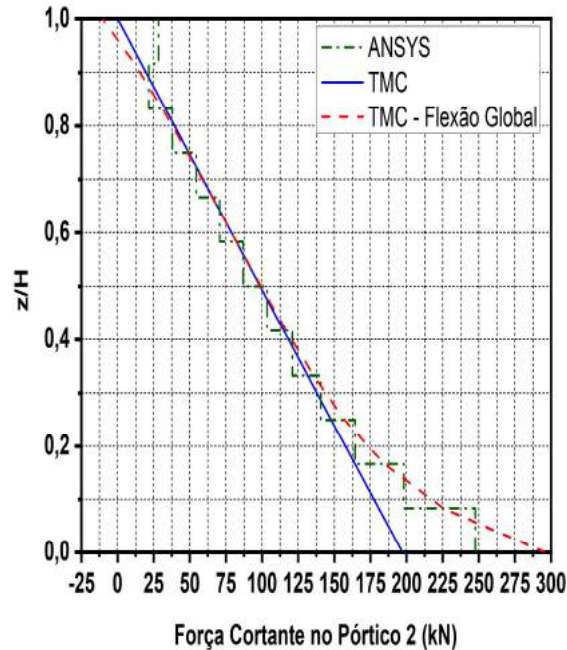


Figura 5.9



## APÊNDICE

### A.1- Parâmetros da Flexo-torção

A figura A1 exibe dois perfis de seção delgada bastante comum, geralmente empregados em núcleos de elevador. No caso do perfil duplo T o centro de torção localiza-se no centro de simetria da seção e os momentos de inércia de torção livre (Saint-Venant) e de flexo torção são dados por:

$$I_t = \frac{1}{3}(2bt^3 + hd^3) \quad (A1)$$

$$J_\omega = \frac{h^2b^3t}{24}$$

e no caso do perfil U o centro de torção é dado por:

$$c = \frac{3h}{6 + b/h} \quad (A2)$$

e os momentos de inércia expressos por:

$$I_t = \frac{1}{3}(bt^3 + 2hd^3) \quad (A3)$$

$$J_\omega = \frac{b^2h^3d(3hd + 2bt)}{12(6hd + bt)}$$

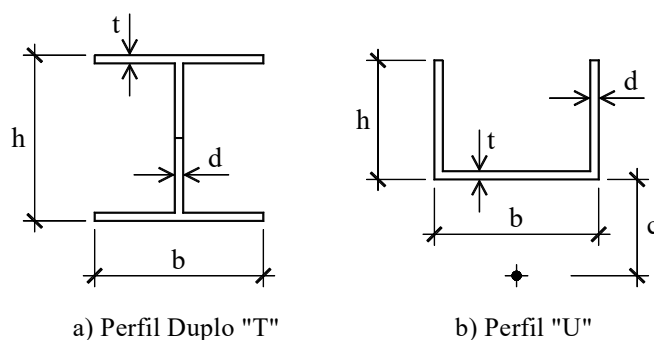


Figura A1

## A.2- Decomposição de Jordam

A decomposição de Jordam de uma matriz é expressa por:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{c} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \dots \\ \ell_n \end{array} \right\}_1 \\ \left\{ \begin{array}{c} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \dots \\ \ell_n \end{array} \right\}_2 \\ \dots \\ \left\{ \begin{array}{c} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \dots \\ \ell_n \end{array} \right\}_n \end{array} \right] \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n \end{bmatrix} \left[ \begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{c} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \dots \\ \ell_n \end{array} \right\}_1 \\ \left\{ \begin{array}{c} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \dots \\ \ell_n \end{array} \right\}_2 \\ \dots \\ \left\{ \begin{array}{c} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \dots \\ \ell_n \end{array} \right\}_n \end{array} \right]^{-1} \quad (\text{A4})$$

onde os elementos da diagonal são os autovalores da matriz em questão e as colunas da primeira matriz do segundo membro são os autovetores correspondentes, lembrando-se que no caso de matriz simétrica os autovalores são reais e os autovetores ortogonais entre si; e, como isso, a matriz inversa indicada em (A4) vem a ser a transposta a matriz original.

A formulação clássica do problema de autovalor consiste na equação:

$$\left[ [A] - \lambda_i [I] \right] \{v\}_i = \{0\} \quad (\text{A5})$$

ou seja:

$$\det \left[ [A] - \lambda_i [I] \right] = 0 \quad (\text{A6})$$

resultando-se num polinômio de grau  $n$  em  $\lambda$ . Para cada uma das raízes do polinômio mencionado vale a relação:

$$[A] \{v\}_i = \{v\}_i \lambda_i \quad (\text{A7})$$

sendo que uma das componentes do autovetor pode ser arbitrada em razão de (A5), ou ainda, agrupando-se:

$$[A] \left[ \{v\}_1 \{v\}_2 \dots \{v\}_n \right] = \left[ \{v\}_1 \{v\}_2 \dots \{v\}_n \right] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (\text{A8})$$

cuja pós-multiplicação pela inversa da matriz dos autovetores resulta em (A4). Cumpre finalmente registrar, que, no caso de haver desacoplamento na matriz, o autovetor também se desacopla.

## CAPÍTULO VI

### ASSOCIAÇÃO TRIDIMENSIONAL DE PAINÉIS: EFEITO $P \Delta$

#### 6.1- Associação Tridimensional de Paredes

A Figura 6.1 esquematiza em planta uma associação tridimensional de paredes, bem como indica a posição do alinhamento vertical do carregamento axial, dado pelas coordenadas  $a_p$  e  $b_p$ . Assim, o movimento da posição do carregamento ao longo da altura decorrente do movimento do conjunto se expressa:

$$\begin{aligned} u_p(z) &= U(z) - W(z)b_p \\ v_p(z) &= V(z) + W(z)a_p \end{aligned} \quad (6.1)$$

onde  $u_p(z)$  e  $v_p(z)$  são os deslocamentos da linha do carregamento axial segundo as direções  $OX$  e  $OY$ .

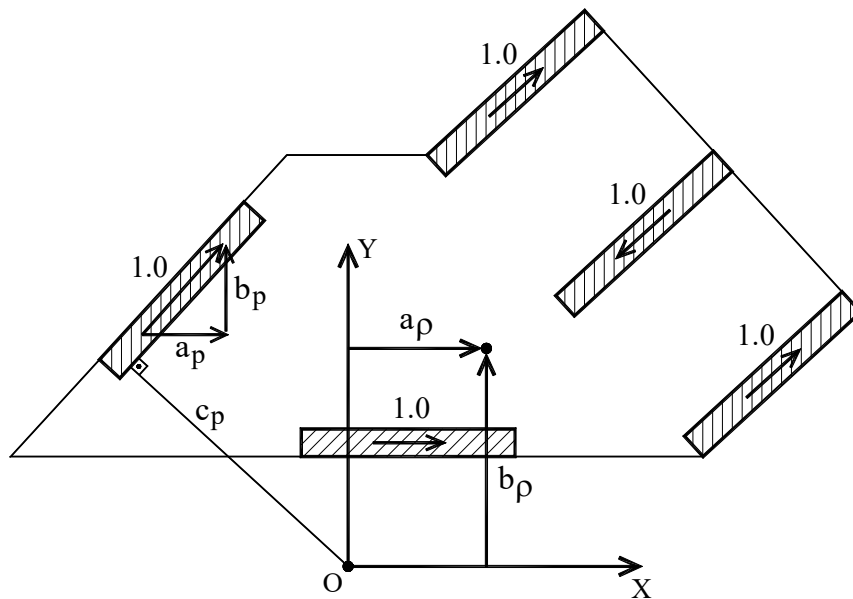


Figura 6.1

Em razão da inclinação da linha vertical do carregamento, os esforços cortantes desenvolvidos ficam expressos por:

$$\begin{aligned} V_X(z) &= \rho(H-z)u_p'(z) = \rho(H-z)(U'(z) - b_p W'(z)) \\ V_Y(z) &= \rho(H-z)v_p'(z) = \rho(H-z)(V'(z) + a_p W'(z)) \\ M_z(z) &= -b_p V_X(z) + a_p V_Y \end{aligned} \quad (6.2)$$

sendo que a terceira de (6.2) expressa o momento de torção desenvolvido. O equilíbrio passa então a ser escrito como:



$$-\begin{bmatrix} J_{aa} & J_{ab} & J_{ac} \\ J_{ab} & J_{bb} & J_{bc} \\ J_{ac} & J_{bc} & J_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U(z) \\ V(z) \\ W(z) \end{Bmatrix}^{\text{III}} = \rho(H-Z) \begin{bmatrix} 1 & 0 & -b_\rho \\ 0 & 1 & a_\rho \\ -b_\rho & a_\rho & b_\rho^2 + a_\rho^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U(z) \\ V(z) \\ W(z) \end{Bmatrix}^{\text{I}} \quad (6.3)$$

resultando-se no seguinte problema de autovalor:

$$\begin{bmatrix} J_{aa} & J_{ab} & J_{ac} \\ J_{ab} & J_{bb} & J_{bc} \\ J_{ac} & J_{bc} & J_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U(z) \\ V(z) \\ W(z) \end{Bmatrix}^{\text{III}} + \rho(H-Z) \begin{bmatrix} 1 & 0 & -b_\rho \\ 0 & 1 & a_\rho \\ -b_\rho & a_\rho & b_\rho^2 + a_\rho^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U(z) \\ V(z) \\ W(z) \end{Bmatrix}^{\text{I}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.4)$$

ou ainda, segundo o sistema de referência dos eixos principais do conjunto de paredes (vide (5.6) e (5.7)), tem-se:

$$\begin{bmatrix} J_{\bar{a}\bar{a}} & 0 & 0 \\ 0 & J_{\bar{b}\bar{b}} & 0 \\ 0 & 0 & J_{\bar{c}\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{U}(z) \\ \bar{V}(z) \\ \bar{W}(z) \end{Bmatrix}^{\text{III}} + \rho(H-Z) \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\bar{b}_\rho \\ 0 & 1 & \bar{a}_\rho \\ -\bar{b}_\rho & \bar{a}_\rho & \bar{b}_\rho^2 + \bar{a}_\rho^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{U}(z) \\ \bar{V}(z) \\ \bar{W}(z) \end{Bmatrix}^{\text{I}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.5)$$

ou mais ainda:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U^*(z) \\ V^*(z) \\ W^*(z) \end{Bmatrix}^{\text{III}} + \rho(H-Z) \begin{bmatrix} \frac{1}{J_{\bar{a}\bar{a}}} & 0 & \frac{-\bar{b}_\rho}{\sqrt{J_{\bar{a}\bar{a}}J_{\bar{c}\bar{c}}}} \\ 0 & \frac{1}{J_{\bar{b}\bar{b}}} & \frac{\bar{a}_\rho}{\sqrt{J_{\bar{b}\bar{b}}J_{\bar{c}\bar{c}}}} \\ \frac{-\bar{b}_\rho}{\sqrt{J_{\bar{a}\bar{a}}J_{\bar{c}\bar{c}}}} & \frac{\bar{a}_\rho}{\sqrt{J_{\bar{b}\bar{b}}J_{\bar{c}\bar{c}}}} & \frac{\bar{b}_\rho^2 + \bar{a}_\rho^2}{J_{\bar{c}\bar{c}}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U^*(z) \\ V^*(z) \\ W^*(z) \end{Bmatrix}^{\text{I}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.6)$$

mediante a transformação de variáveis:

$$\begin{Bmatrix} \bar{U}(z) \\ \bar{V}(z) \\ \bar{W}(z) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{J_{\bar{a}\bar{a}}} & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{J_{\bar{b}\bar{b}}} & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{J_{\bar{c}\bar{c}}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U^*(z) \\ V^*(z) \\ W^*(z) \end{Bmatrix} \quad (6.7)$$

e pré multiplicando-se o equilíbrio resultante nessa nova variável pela matriz presente em (6.7).

Para completar o desacoplamento, a decomposição de Jordam da matriz acoplado em (6.6) apresenta a seguinte equação característica:

$$\sigma^3 + a^* \sigma^2 + b^* \sigma + c^* = 0 \quad (6.8)$$

onde:

$$\begin{aligned}
a^* &= -\left(\frac{1}{J_{aa}} + \frac{1}{J_{bb}} + \frac{\bar{b}_p^2 + \bar{a}_p^2}{J_{cc}}\right) \\
b^* &= \frac{1}{J_{aa}} \frac{1}{J_{bb}} + \frac{\bar{b}_p^2 + \bar{a}_p^2}{J_{aa} J_{cc}} + \frac{\bar{b}_p^2 + \bar{a}_p^2}{J_{bb} J_{cc}} - \left(\frac{\bar{a}_p}{\sqrt{J_{bb} J_{cc}}}\right)^2 - \left(\frac{\bar{b}_p}{\sqrt{J_{aa} J_{cc}}}\right)^2 = \\
&\frac{1}{J_{aa} J_{bb}} + \frac{a_p^2}{J_{aa} J_{cc}} + \frac{b_p^2}{J_{bb} J_{cc}} \\
c^* &= \left(\frac{\bar{a}_p}{\sqrt{J_{bb} J_{cc}}}\right)^2 \frac{1}{J_{aa}} + \left(\frac{\bar{b}_p}{\sqrt{J_{aa} J_{cc}}}\right)^2 \frac{1}{J_{bb}} - \frac{\bar{b}_p^2 + \bar{a}_p^2}{J_{aa} J_{bb} J_{cc}} = 0
\end{aligned} \tag{6.9}$$

cujas raízes são reais em razão da simetria da matriz em questão, mas uma das raízes é nula como se verifica da última de (6.9), e expressas pelas fórmulas de Cardam:

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= 2\sqrt[3]{\rho} \cos(\alpha/3) + a^*/3 \\
\sigma_2 &= 2\sqrt[3]{\rho} \cos((2\pi - \alpha)/3) + a^*/3 \\
\sigma_3 &= 2\sqrt[3]{\rho} \cos((2\pi + \alpha)/3) + a^*/3
\end{aligned} \tag{6.10}$$

onde:

$$\begin{aligned}
\rho &= \sqrt[3]{\frac{1}{27} \left( \frac{(a^*)^2}{3} - b^* \right)^3} \\
\alpha &= \arccos\left(\frac{R}{\rho}\right)
\end{aligned} \tag{6.11}$$

sendo:

$$R = \frac{1}{2} \left( \frac{b^* a^*}{3} - \frac{2(a^*)^3}{27} \right) \tag{6.12}$$

Por outro lado, os correspondentes autovetores são expressos por:

$$\begin{Bmatrix} \ell \\ m \\ n \end{Bmatrix}_i = \begin{Bmatrix} \gamma_i / \sqrt{\gamma_i^2 + \delta_i^2 + 1} \\ \delta_i / \sqrt{\gamma_i^2 + \delta_i^2 + 1} \\ 1 / \sqrt{\gamma_i^2 + \delta_i^2 + 1} \end{Bmatrix} \tag{6.13}$$

onde:

$$\begin{aligned}
\gamma_i &= \frac{-\bar{a}_p J_{bb}}{(1 - J_{aa} \sigma_i) \sqrt{J_{aa} J_{cc}}} \\
\delta_i &= \frac{\bar{b}_p J_{bb}}{(1 - J_{bb} \sigma_i) \sqrt{J_{bb} J_{cc}}}
\end{aligned} \tag{6.14}$$

valendo-se ressaltar que a raiz nula corresponderia à carga crítica de torção sem sentido no caso em análise, uma vez que algo como a consideração de bimomento não cabe nesse caso, pelo menos em teoria linear.

Finalmente, a última transformação de variáveis se expressa:

$$\begin{Bmatrix} U^*(z) \\ V^*(z) \\ W^*(z) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \ell \\ m \\ n \end{matrix} \right\}_1 & \left\{ \begin{matrix} \ell \\ m \\ n \end{matrix} \right\}_2 & \left\{ \begin{matrix} \ell \\ m \\ n \end{matrix} \right\}_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2(z) \\ V_2(z) \\ W_2(z) \end{Bmatrix} \quad (6.15)$$

sendo as colunas da matriz de transformação os autovetores dados em (6.13), e assim, em razão da ortogonalidade dos autovetores decorrente da simetria da matriz acoplado o sistema de equações em (6.6), e tendo-se em conta o exposto em (6.15), o exposto em (6.6) ganha a seguinte escrita:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2(z) \\ V_2(z) \\ W_2(z) \end{Bmatrix}^{\text{III}} + \rho(H-z) \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2(z) \\ V_2(z) \\ W_2(z) \end{Bmatrix}^{\text{I}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.16)$$

a exemplo do exposto em (5.25). As equações desacopladas (6.16) são do tipo:

$$\varphi_i^{\text{III}} + \rho(H-z)\sigma_i\varphi_i^{\text{I}} = 0 \quad (6.17)$$

resultando-se na carga crítica:

$$N_c = \rho_c H = \frac{7.837}{\sigma_c H^2} \quad (6.18)$$

sendo  $\sigma_c$  a maior das raízes. A exemplo do exposto em (3.24), o coeficiente de majoração para as deformadas nas respectivas direções generalizadas são expressas por:

$$\begin{Bmatrix} U_2(z) \\ V_2(z) \\ W_2(z) \end{Bmatrix}_a = \begin{Bmatrix} \gamma_1 \tilde{U}_2(z) \\ \gamma_2 \tilde{V}_2(z) \\ \gamma_3 \tilde{W}_2(z) \end{Bmatrix} \quad (6.19)$$

onde:

$$\gamma_i = \frac{e^{\frac{\Phi}{(N_{ci}/N)-1}}}{1 - N/N_{ci}} \quad (6.20)$$

$$\begin{Bmatrix} \tilde{U}_2(z) \\ \tilde{V}_2(z) \\ \tilde{W}_2(z) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \ell \\ m \\ n \end{matrix} \right\}_1 & \left\{ \begin{matrix} \ell \\ m \\ n \end{matrix} \right\}_2 & \left\{ \begin{matrix} \ell \\ m \\ n \end{matrix} \right\}_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sqrt{J_{aa}} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{J_{bb}} & 0 \\ 0 & 0 & J_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{U}(z) \\ \bar{V}(z) \\ \bar{W}(z) \end{Bmatrix}_{\text{in}}$$

onde  $\gamma_i$ , como exposto em (3.24), vem a ser o amplificador da deformada para o caso de efeito de segunda ordem, acrescido da amplificação da deformação lenta; o desalinhamento inicial (desaprumo ou deformada provocada por carregamento) indica-se pelo índice  $\text{in}$ , e a deformada nas direções generalizadas são indicadas com símbolo til superior, que consiste na inversão

do expresso em (5.34). Finalmente, a deformada final, como em (5.34), passa então a ser expressa por:

$$\begin{Bmatrix} \bar{U}(z) \\ \bar{V}(z) \\ \bar{W}(z) \end{Bmatrix}_F = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{J_{aa}} & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{J_{bb}} & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{J_{cc}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \ell \\ m \\ n \end{matrix} \right\}_1 \\ \left\{ \begin{matrix} \ell \\ m \\ n \end{matrix} \right\}_2 \\ \left\{ \begin{matrix} \ell \\ m \\ n \end{matrix} \right\}_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2(z) \\ V_2(z) \\ W_2(z) \end{Bmatrix}_a \quad (6.21)$$

onde o índice F indica a deformada final.

Cabe assinalar que, embora a rotação  $W_2(z)$  vem a ser nula, uma vez que a última de (6.16) implica:

$$W_2^{III}(z) = 0 \rightarrow W_2(z) = A_0 + B_0 z + C_0 \frac{z^2}{2}$$

mas, com as condições de contorno:  $W_2(z=0) = 0$ ,  $W_2^I(z=0) = 0$  e  $W_2^{II}(z=0) = 0$ , e igualmente vem a ser nula a rotação amplificada. Todavia, a rotação no sistema de referência original não se anula devido ao acoplamento como expresso em (6.21).

## 6.2- Primeiro Exemplo de Aplicação

Como primeiro exemplo de aplicação, considere-se o edifício de paredes estudado no item (5.4), com carga vertical distribuída na posição:  $a_p = 2,44\text{m}$  e  $b_p = -3.33\text{m}$  (vide Figura 5.3), que vem a ser aposição do centro de gravidade da planta. A equação de equilíbrio no sistema original então se expressa:

$$10^6 \begin{bmatrix} 9.0 & 0 & 0 \\ 0 & 50.6 & 0 \\ 0 & 0 & 557.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{U}(z) \\ \bar{V}(z) \\ \bar{W}(z) \end{Bmatrix}^{III} + \rho(60-Z) \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3.33 \\ 0 & 1 & 2.44 \\ -3.33 & 2.44 & 17.04 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{U}(z) \\ \bar{V}(z) \\ \bar{W}(z) \end{Bmatrix}^I = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ou ainda:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2(z) \\ V_2(z) \\ W_2(z) \end{Bmatrix}^{III} + \rho(H-Z) \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2(z) \\ V_2(z) \\ W_2(z) \end{Bmatrix}^I = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

onde, considerando-se nulo o terceiro autovalor ( $\sigma_3 = 0$ ), os outros autovalores são as raízes da equação:

$$\sigma^2 - 0.161443461 \times 10^{-6} \sigma + 0.003775528 \times 10^{-12} = 0$$

ou seja:

$$\sigma_1 = 0.028372234 \times 10^{-6} \rightarrow N_{c1} = \frac{7.837}{0.028372234 \times 10^{-6} \times 60^2} = 76728 \text{ kN}$$

$$\sigma_2 = 0.133071226 \times 10^{-6} \rightarrow N_{c2} = \frac{7.837}{0.133071226 \times 10^{-6} \times 60^2} = 16359 \text{ kN}$$

e a matriz de autovetores correspondente resulta

$$\left[ \begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{c} 0.2784 \\ 0.8262 \\ 0.4896 \end{array} \right\}_1 \\ \left\{ \begin{array}{c} -0.9048 \\ 0.05414 \\ 0.4223 \end{array} \right\}_2 \\ \left\{ \begin{array}{c} 0.3229 \\ -0.5606 \\ 0.7626 \end{array} \right\}_3 \end{array} \right]$$

assinalando-se não fazer sentido a consideração de carga crítica torcional, embora o acoplamento (6.21), como já mencionado, implica haver acoplamento com torção no sistema de referência original. Vale também, chamar a atenção para o fato de se tratar de uma estrutura com muita assimetria de rigidez, de tal sorte que a carga crítica  $N_c = 16359 \text{ kN}$  ser quase igual à carga de projeto, algo como  $N = (10 \text{ kN} / \text{m}^2) \times (S = 75 \text{ m}^2) \times 20 = 15000 \text{ kN}$ .

### 6.3- Associação Tridimensional de Pórticos com Colunas Indeformáveis Axialmente

A equação de equilíbrio da associação tridimensional de pórticos com colunas indeformáveis axialmente tem a seguinte redação:

$$-\begin{bmatrix} J_{aa} & J_{ab} & J_{ac} \\ J_{ab} & J_{bb} & J_{bc} \\ J_{ac} & J_{bc} & J_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U(z) \\ V(z) \\ W(z) \end{Bmatrix}^{\text{III}} + \begin{bmatrix} S_{aa} & S_{ab} & S_{ac} \\ S_{ab} & S_{bb} & S_{bc} \\ S_{ac} & S_{bc} & S_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U(z) \\ V(z) \\ W(z) \end{Bmatrix}^{\text{I}} = \rho(H-Z) \begin{bmatrix} 1 & 0 & -b_\rho \\ 0 & 1 & a_\rho \\ -b_\rho & a_\rho & b_\rho^2 + a_\rho^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U(z) \\ V(z) \\ W(z) \end{Bmatrix}^{\text{I}} \quad (6.22)$$

ou ainda:

$$\begin{aligned}
& - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U^*(z) \\ V^*(z) \\ W^*(z) \end{Bmatrix}^{\text{III}} + \\
& + \begin{bmatrix} \frac{S_{\bar{a}\bar{a}}}{J_{\bar{a}\bar{a}}} & \frac{S_{\bar{a}\bar{b}}}{\sqrt{J_{\bar{a}\bar{a}}J_{\bar{b}\bar{b}}}} & \frac{S_{\bar{a}\bar{c}}}{\sqrt{J_{\bar{a}\bar{a}}J_{\bar{c}\bar{c}}}} \\ \frac{S_{\bar{a}\bar{b}}}{\sqrt{J_{\bar{a}\bar{a}}J_{\bar{b}\bar{b}}}} & \frac{S_{\bar{b}\bar{b}}}{J_{\bar{b}\bar{b}}} & \frac{S_{\bar{b}\bar{c}}}{\sqrt{J_{\bar{b}\bar{b}}J_{\bar{c}\bar{c}}}} \\ \frac{S_{\bar{a}\bar{c}}}{\sqrt{J_{\bar{a}\bar{a}}J_{\bar{c}\bar{c}}}} & \frac{S_{\bar{b}\bar{c}}}{\sqrt{J_{\bar{b}\bar{b}}J_{\bar{c}\bar{c}}}} & \frac{S_{\bar{c}\bar{c}}}{J_{\bar{c}\bar{c}}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U^*(z) \\ V^*(z) \\ W^*(z) \end{Bmatrix}^{\text{I}} + \\
& -\rho(H-Z) \begin{bmatrix} \frac{1}{J_{\bar{a}\bar{a}}} & 0 & \frac{-\bar{b}_\rho}{\sqrt{J_{\bar{a}\bar{a}}J_{\bar{c}\bar{c}}}} \\ 0 & \frac{1}{J_{\bar{b}\bar{b}}} & \frac{\bar{a}_\rho}{\sqrt{J_{\bar{b}\bar{b}}J_{\bar{c}\bar{c}}}} \\ \frac{-\bar{b}_\rho}{\sqrt{J_{\bar{a}\bar{a}}J_{\bar{c}\bar{c}}}} & \frac{\bar{a}_\rho}{\sqrt{J_{\bar{b}\bar{b}}J_{\bar{c}\bar{c}}}} & \frac{\bar{b}_\rho^2 + \bar{a}_\rho^2}{J_{\bar{c}\bar{c}}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U^*(z) \\ V^*(z) \\ W^*(z) \end{Bmatrix}^{\text{I}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.23)
\end{aligned}$$

mediante a transformação que resultou em (6.6). Procedendo-se o desacoplamento mediante a decomposição de Jordam da matriz do segundo termo de (6.23), como já feito em casos anteriores, o equilíbrio em questão passa a ser expresso por:

$$\begin{aligned}
& - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2(z) \\ V_2(z) \\ W_2(z) \end{Bmatrix}^{\text{III}} + \\
& + \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2(z) \\ V_2(z) \\ W_2(z) \end{Bmatrix}^{\text{I}} + \\
& -\rho(H-Z) \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2(z) \\ V_2(z) \\ W_2(z) \end{Bmatrix}^{\text{I}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.24)
\end{aligned}$$

onde  $\sigma_i$  são obtidos como em (5.18) e:

$$\begin{aligned}
A_{11} &= \frac{\ell_1^2}{J_{aa}} - 2 \frac{b_\rho \ell_1 n_1}{\sqrt{J_{aa} J_{cc}}} + \frac{m_1^2}{J_{bb}} + 2 \frac{a_\rho m_1 n_1}{\sqrt{J_{bb} J_{cc}}} + \frac{n_1^2 (a_\rho^2 + b_\rho^2)}{J_{cc}} \\
A_{22} &= \frac{\ell_2^2}{J_{aa}} - 2 \frac{b_\rho \ell_2 n_2}{\sqrt{J_{aa} J_{cc}}} + \frac{m_2^2}{J_{bb}} + 2 \frac{a_\rho m_2 n_2}{\sqrt{J_{bb} J_{cc}}} + \frac{n_2^2 (a_\rho^2 + b_\rho^2)}{J_{cc}} \\
A_{33} &= \frac{\ell_3^2}{J_{aa}} - 2 \frac{b_\rho \ell_3 n_3}{\sqrt{J_{aa} J_{cc}}} + \frac{m_3^2}{J_{bb}} + 2 \frac{a_\rho m_3 n_3}{\sqrt{J_{bb} J_{cc}}} + \frac{n_3^2 (a_\rho^2 + b_\rho^2)}{J_{cc}} \\
A_{12} &= \frac{\ell_1 \ell_2}{J_{aa}} - \frac{b_\rho (\ell_2 n_1 + \ell_1 n_2)}{\sqrt{J_{aa} J_{cc}}} + \frac{m_1 m_2}{J_{bb}} + \frac{a_\rho (m_2 n_1 + m_1 n_2)}{\sqrt{J_{bb} J_{cc}}} + \frac{n_1 n_2 (a_\rho^2 + b_\rho^2)}{J_{cc}} \\
A_{13} &= \frac{\ell_1 \ell_3}{J_{aa}} - \frac{b_\rho (\ell_3 n_1 + \ell_1 n_3)}{\sqrt{J_{aa} J_{cc}}} + \frac{m_1 m_3}{J_{bb}} + \frac{a_\rho (m_3 n_1 + m_1 n_3)}{\sqrt{J_{bb} J_{cc}}} + \frac{n_1 n_3 (a_\rho^2 + b_\rho^2)}{J_{cc}} \\
A_{23} &= \frac{\ell_2 \ell_3}{J_{aa}} - \frac{b_\rho (\ell_3 n_2 + \ell_2 n_3)}{\sqrt{J_{aa} J_{cc}}} + \frac{m_2 m_3}{J_{bb}} + \frac{a_\rho (m_3 n_2 + m_2 n_3)}{\sqrt{J_{bb} J_{cc}}} + \frac{n_2 n_3 (a_\rho^2 + b_\rho^2)}{J_{cc}}
\end{aligned} \tag{6.25}$$

valendo-se notar que os termos da diagonal envolvem produtos dos mesmos vetores, maximizando os resultados, e os termos fora da diagonal envolvem produtos de vetores ortogonais, minimizando-se as magnitudes resultantes.

O acoplamento verificado (6.24) não tem como ser eliminado, e esse fato já é de longa data conhecido. Uma solução aproximada mediante o emprego da Teoria da Perturbação foi sugerida por Rutenberg e outros (A. Rutenberg, W. K.Tso e A. C. Heidebrecht, *Dynamic Properties of Asymmetric Wall-Frame Structures*, *Earth. Eng. Struct Dyn*, V5, 41-51, 1977), mostrando que, mesmo no caso de um expressivo acoplamento provocado pelos elementos fora da diagonal, a solução negligenciando-se esses termos já fornece uma boa resposta, ou seja, valendo-se o equilíbrio:

$$\begin{aligned}
& - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2(z) \\ V_2(z) \\ W_2(z) \end{Bmatrix}_a^{\text{III}} + \\
& + \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2(z) \\ V_2(z) \\ W_2(z) \end{Bmatrix}_a^{\text{I}} \\
& \rho(H-Z) \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2(z) \\ V_2(z) \\ W_2(z) \end{Bmatrix}_a^{\text{I}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{6.26}$$

resultando-se em equações desacopladas do tipo:

$$\phi_i^{\text{III}}(z) + \sigma_i \phi_i^{\text{I}}(z) + \rho(H-z) A_{ii} \phi_i^{\text{I}}(z) = 0 \tag{6.27}$$

cujos autovalores  $s = \rho A_{ii} H^3 / 7.837$  acham-se arrolados na Tabela 3.1 do Capítulo III para valores práticos dos parâmetros  $\lambda_f = H\sqrt{\sigma_i}$  (vide expressões (3.34) e (3.35) ), com  $\mu_i = 1$ , que corresponde ao caso de pórtico com colunas indeformáveis axialmente; fato já discutido no item 2.4 do Capítulo II. A majoração da deformada  $\varphi_i(z)$  pelos efeitos de segunda ordem e deformação lenta, no sistema de referência central das paredes, é, pois, expressa como em (3.24).

#### 6.4- Associação Tridimensional de Pórticos com Colunas Deformáveis Axialmente

A equação de equilíbrio da associação tridimensional de pórticos com colunas indeformáveis axialmente tem a seguinte redação:

$$\begin{aligned}
 & - \begin{bmatrix} J_{aa} & J_{ab} & J_{ac} \\ J_{ab} & J_{bb} & J_{bc} \\ J_{ac} & J_{bc} & J_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U(z) \\ V(z) \\ W(z) \end{Bmatrix}^{\text{III}} + \begin{bmatrix} S_{aa} & S_{ab} & S_{ac} \\ S_{ab} & S_{bb} & S_{bc} \\ S_{ac} & S_{bc} & S_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U(z) \\ V(z) \\ W(z) \end{Bmatrix}^{\text{I}} + \\
 & \begin{bmatrix} 1 & 0 & -b_p \\ 0 & 1 & a_p \\ -b_p & a_p & b_p^2 + a_p^2 \end{bmatrix} \left[ \frac{\bar{S}_f}{\bar{K}_0} \rho(H-Z) \begin{Bmatrix} U(z) \\ V(z) \\ W(z) \end{Bmatrix}^{\text{I}} + \rho \begin{Bmatrix} U(z) \\ V(z) \\ W(z) \end{Bmatrix}^{\text{II}} \right] = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{6.28}$$

ou ainda:

$$\begin{aligned}
 & - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2(z) \\ V_2(z) \\ W_2(z) \end{Bmatrix}_a^{\text{V}} + \\
 & + \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2(z) \\ V_2(z) \\ W_2(z) \end{Bmatrix}_a^{\text{III}} + \\
 & \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix} \left[ \frac{\bar{S}_f}{\bar{K}_0} \rho(H-Z) \begin{Bmatrix} U_2(z) \\ V_2(z) \\ W_2(z) \end{Bmatrix}_a^{\text{I}} + \rho \begin{Bmatrix} U_2(z) \\ V_2(z) \\ W_2(z) \end{Bmatrix}_a^{\text{II}} \right] = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{6.29}$$

que consiste em desacoplamento similar ao do item anterior, com  $A_{ii}$  expresso em (6.26), resultando-se em equações desacopladas do tipo:

$$-\varphi_i^{\text{V}}(z) + \sigma_i \varphi_i^{\text{III}}(z) + A_{ii} \rho \left[ \frac{\bar{S}_f}{\bar{K}_0} (H-z) \varphi_i^{\text{I}}(z) + \varphi_i^{\text{II}}(z) \right] = 0 \tag{6.30}$$

cujos autovalores  $s = \rho A_{ii} H^3 / 7.837$  acham-se arrolados na Tabela 3.1 do Capítulo III para valores dos parâmetros:



$$\begin{aligned}\lambda_i &= H\sqrt{\sigma_i} \\ \mu_i &= \sqrt{\frac{\sigma_i \bar{K}_0}{\sigma_i \bar{K}_0 - \bar{s}_f}}\end{aligned}\quad (6.31)$$

onde o parâmetro  $\mu_i$  decorre do fato de se buscar uma similaridade com o expresso em (3.34), ou seja:

$$-\varphi_i^V(z) + \sigma_i \varphi_i^{III}(z) + A_{ii} \rho \left[ \sigma_i \frac{\bar{s}_f}{\sigma_i \bar{K}_0} (H-z) \varphi_i^I(z) + \varphi_i^{II}(z) \right] = 0 \quad (6.32)$$

e, assim sendo, tem-se:

$$\frac{\bar{s}_f}{\sigma_i \bar{K}_0} = \frac{\mu_i^2 - 1}{\mu_i^2} \quad (6.33)$$

resultando-se:

$$N_c = \rho_c H = \frac{7.837}{H^2} \left( \frac{s}{A_{ii}} \right)_{\min} \quad (6.34)$$

que consiste na carga crítica correspondente às equações desacopladas (6.29). A majoração da deformada inicial pelos efeitos de segunda ordem e deformação lenta, no sistema de referência central das paredes, é, pois, expressa como em (6.21).

### 6.5- Segundo Exemplo de Aplicação

Considere-se novamente o edifício cuja planta exhibe-se na Figura 5.6, que, no sistema de referência original (eixos centrais do conjunto de paredes), tem centro de gravidade na posição  $a_p = 0$ , devido a simetria, e  $b_p = 149.73\text{cm}$ , lembrando-se que, como no primeiro exemplo, o carregamento axial uniformemente distribuído ao longo da altura é suposto alinhado segundo o centro de gravidade da seção da planta. Os outros dados do edifício em apreço são:

$$\mu_1 \cong \mu_2 \cong \mu_3 \cong 1.0$$

$$\sigma_1 = 49.801 \times 10^{-6} \rightarrow \lambda_1 = 25.4 \rightarrow s \gg 74 \rightarrow \begin{cases} a_1 = 0.2 \\ a_2 = 0.07 \\ a_3 = 0.03 \end{cases}$$

$$\sigma_2 = 6.9386 \times 10^{-6} \rightarrow \lambda_2 = 9.48 \rightarrow s = 20.8 \rightarrow \begin{cases} a_1 = 0.4 \\ a_2 = 0.13 \\ a_3 = 0.062 \end{cases}$$

$$\sigma_3 = 14.288 \times 10^{-6} \rightarrow \lambda_3 = 13.6 \rightarrow s = 38 \rightarrow \begin{cases} a_1 = 0.28 \\ a_2 = 0.09 \\ a_3 = 0.05 \end{cases}$$

$$A_{11} = 0.4446 \times 10^{-10}$$

$$A_{22} = 0.2025 \times 10^{-10}$$

$$A_{33} = 0.00152 \times 10^{-10}$$

$$A_{12} = 0.0$$

$$A_{13} = -0.0262 \times 10^{-10}$$

$$A_{23} = 0.0$$

Com os dados do edifício em questão, verifica-se pois:

$$N_c = \frac{7.837}{3600^2} \left( \frac{20.8}{0.2025 \times 10^{-10}} \right)_{\min} = 6.211 \times 10^5 \text{ kN}$$

uma vez que, embora  $A_{11} = 0.4446 \times 10^{-10} > A_{22} = 0.2025 \times 10^{-10}$ , o majorador  $s$  supera em mais de 3 vezes o valor 20.8 correspondente ao  $A_{22}$ ; sem contar que  $A_{33}$  é algo como mil vezes menor que  $A_{22}$ . A título de registro  $A_{12} = 0$ ,  $A_{23} = 0$  e  $A_{13} = -0.0262 \times 10^{-10}$ , confirmando-se que os termos fora da diagonal são mesmo menores que os da diagonal. A simulação pelo Ansys em pregando nas vigas e pilares o elemento Beam 188, e nas lajes o elemento 181, num total de 43380 elementos, resultou em  $8.01 \times 10^5$  kN

## CAPÍTULO VII

## ASSOCIAÇÃO TRIDIMENSIONAL DE PAINÉIS: VIBRAÇÃO LIVRE

## 7.1- Associação Tridimensional de Paredes

A Figura 7.1 esquematiza em planta uma associação tridimensional de paredes, bem como indica a posição do centro de massa, dado pelas coordenadas  $a_m$  e  $b_m$ . Assim, o movimento experimentado no centro de massa, suposto não variar sua posição ao longo da altura, decorrente do movimento do conjunto se expressa:

$$\begin{aligned} u_m(z) &= U(z) - W(z)b_m \\ v_m(z) &= V(z) + W(z)a_m \\ w_m(z) &= W(z) \end{aligned} \quad (7.1)$$

onde  $u_m(z)$  e  $v_m(z)$  são os deslocamentos do centro de massa segundo as direções  $OX$  e  $OY$ , e a rotação  $w_m(z)$  é idêntica à do conjunto  $W(z)$ .

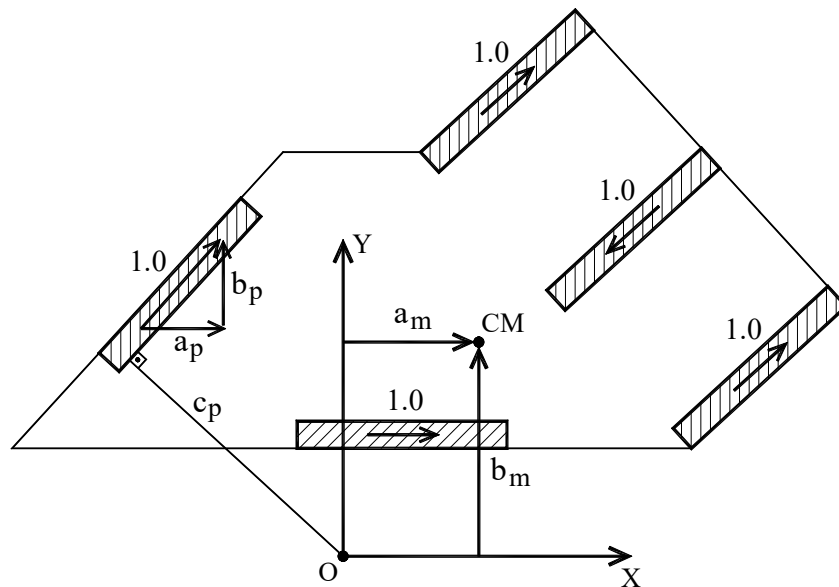


Figura 7.1

Adotando-se o sistema de referência segundo os eixos centrais do conjunto de paredes, e tendo-se em conta que a resultante das forças de inércia atua segundo o centro de massa, o equilíbrio dinâmico ganha a seguinte redação:

$$- \begin{bmatrix} J_{\bar{a}\bar{a}} & 0 & 0 \\ 0 & J_{\bar{b}\bar{b}} & 0 \\ 0 & 0 & J_{\bar{c}\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{U}(z) \\ \bar{V}(z) \\ \bar{W}(z) \end{Bmatrix}^{IV} - \begin{Bmatrix} m\ddot{u}_m(z) \\ m\ddot{v}_m(z) \\ -m\ddot{u}_m(z)\bar{b}_m + m\ddot{v}_m(z)\bar{a}_m + J_m\ddot{w}_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7.2)$$

onde  $m$  é a massa do edifício por unidade de altura, bem como  $J_m$  o momento de inércia também por unidade de altura. Supondo-se massa uniformemente distribuída no andar tem-se:

$$J_m = \int_S \frac{m}{S} (x_m^2 + y_m^2) dS = \frac{m}{S} (I_{y_m} + I_{x_m}) \quad (7.3)$$

sendo  $S$  a área do andar,  $x_m$  e  $y_m$  coordenadas segundo o sistema de referência com origem no centro de massa, bem como  $I_{y_m}$  e  $I_{x_m}$  os momentos de inércia da seção correspondente ao andar

Tendo-se em conta o expresso em (7.1), o equilíbrio dinâmico (7.2) passa a ser expresso por:

$$-\begin{bmatrix} J_{aa} & 0 & 0 \\ 0 & J_{bb} & 0 \\ 0 & 0 & J_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{U}(z) \\ \bar{V}(z) \\ \bar{W}(z) \end{Bmatrix}^{IV} - m \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\bar{b}_m \\ 0 & 1 & \bar{a}_m \\ -\bar{b}_m & \bar{a}_m & \bar{a}_m^2 + \bar{b}_m^2 + J_m / m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\bar{U}}(z) \\ \ddot{\bar{V}}(z) \\ \ddot{\bar{W}}(z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7.4)$$

cuja equação de frequências correspondente, como já discutido no Capítulo IV (vide (4.6)), se escreve:

$$-\begin{bmatrix} J_{aa} & 0 & 0 \\ 0 & J_{bb} & 0 \\ 0 & 0 & J_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{U}(z) \\ \bar{V}(z) \\ \bar{W}(z) \end{Bmatrix}^{IV} + m\omega^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\bar{b}_m \\ 0 & 1 & \bar{a}_m \\ -\bar{b}_m & \bar{a}_m & \bar{a}_m^2 + \bar{b}_m^2 + J_m / m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{U}(z) \\ \bar{V}(z) \\ \bar{W}(z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7.5)$$

mais ainda:

$$-\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U^*(z) \\ V^*(z) \\ W^*(z) \end{Bmatrix}^{IV} + m\omega^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{J_{aa}} & 0 & \frac{-\bar{b}_p}{\sqrt{J_{aa}J_{cc}}} \\ 0 & \frac{1}{J_{bb}} & \frac{\bar{a}_p}{\sqrt{J_{bb}J_{cc}}} \\ \frac{-\bar{b}_p}{\sqrt{J_{aa}J_{cc}}} & \frac{\bar{a}_p}{\sqrt{J_{bb}J_{cc}}} & \frac{\bar{b}_p^2 + \bar{a}_p^2 + J_m / m}{J_{cc}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U^*(z) \\ V^*(z) \\ W^*(z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7.6)$$

em razão da transformação:

$$\begin{Bmatrix} \bar{U}(z) \\ \bar{V}(z) \\ \bar{W}(z) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{J_{aa}} & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{J_{bb}} & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{J_{cc}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U^*(z) \\ V^*(z) \\ W^*(z) \end{Bmatrix} \quad (7.7)$$

mediante pré-e-pós multiplicação matricial.

O desacoplamento de (7.6) é alcançado mediante a decomposição de Jordam, como já discutido no Capítulo VI, resultando na seguinte equação característica:

$$\sigma^3 + a^* \sigma^2 + b^* \sigma + c^* = 0 \quad (7.8)$$

onde:

$$\begin{aligned} a^* &= - \left( \frac{1}{J_{\bar{a}\bar{a}}} + \frac{1}{J_{\bar{b}\bar{b}}} + \frac{\bar{b}_\rho^2 + \bar{a}_\rho^2 + J_m / m}{J_{\bar{c}\bar{c}}} \right) \\ b^* &= \frac{1}{J_{\bar{a}\bar{a}}} \frac{1}{J_{\bar{b}\bar{b}}} + \frac{\bar{b}_\rho^2 + \bar{a}_\rho^2 + J_m / m}{J_{\bar{a}\bar{a}} J_{\bar{c}\bar{c}}} + \frac{\bar{b}_\rho^2 + \bar{a}_\rho^2 + J_m / m}{J_{\bar{b}\bar{b}} J_{\bar{c}\bar{c}}} - \left( \frac{\bar{a}_\rho}{\sqrt{J_{\bar{b}\bar{b}} J_{\bar{c}\bar{c}}}} \right)^2 - \left( \frac{\bar{b}_\rho}{\sqrt{J_{\bar{a}\bar{a}} J_{\bar{c}\bar{c}}}} \right)^2 = \\ & \frac{1}{J_{\bar{a}\bar{a}}} \frac{1}{J_{\bar{b}\bar{b}}} + \frac{\bar{a}_\rho^2 + J_m / m}{J_{\bar{a}\bar{a}} J_{\bar{c}\bar{c}}} + \frac{\bar{b}_\rho^2 + J_m / m}{J_{\bar{b}\bar{b}} J_{\bar{c}\bar{c}}} \\ c^* &= \left( \frac{\bar{a}_\rho}{\sqrt{J_{\bar{b}\bar{b}} J_{\bar{c}\bar{c}}}} \right)^2 \frac{1}{J_{\bar{a}\bar{a}}} + \left( \frac{\bar{b}_\rho}{\sqrt{J_{\bar{a}\bar{a}} J_{\bar{c}\bar{c}}}} \right)^2 \frac{1}{J_{\bar{b}\bar{b}}} - \frac{\bar{b}_\rho^2 + \bar{a}_\rho^2 + J_m / m}{J_{\bar{a}\bar{a}} J_{\bar{b}\bar{b}} J_{\bar{c}\bar{c}}} = \frac{J_m / m}{J_{\bar{a}\bar{a}} J_{\bar{b}\bar{b}} J_{\bar{c}\bar{c}}} \end{aligned} \quad (7.9)$$

resultando numa nova versão para a equação de equilíbrio dinâmico, ou seja:

$$- \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2(z) \\ V_2(z) \\ W_2(z) \end{Bmatrix}^{VI} + m\omega^2 \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2(z) \\ V_2(z) \\ W_2(z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7.10)$$

por força da nova transformação de variáveis (vide (6.15)):

$$\begin{Bmatrix} U^*(z) \\ V^*(z) \\ W^*(z) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \ell \\ m \\ n \end{bmatrix}_1 & \begin{bmatrix} \ell \\ m \\ n \end{bmatrix}_2 & \begin{bmatrix} \ell \\ m \\ n \end{bmatrix}_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2(z) \\ V_2(z) \\ W_2(z) \end{Bmatrix} \quad (7.11)$$

onde os vetores que formam as colunas da matriz em questão são os autovetores da matriz ainda acoplando o sistema em (7.6). As equações desacopladas (7.10) são do tipo:

$$-\varphi_i^{VI} + \sigma_i m \omega^2 \varphi_i = 0 \quad (7.12)$$

resultando-se nas frequências naturais:

$$\begin{aligned} \omega_{1i} &= \frac{3.516}{H^2} \sqrt{1 / \sigma_i m} \\ \omega_{2i} &= \frac{22.03}{H^2} \sqrt{1 / \sigma_i m} \\ \omega_{3i} &= \frac{61.70}{H^2} \sqrt{1 / \sigma_i m} \\ \omega_{ji} &\cong \left( \frac{2i-1}{2} \pi \right)^2 \frac{1}{H^2} \sqrt{1 / \sigma_i m} \rightarrow j > 3 \end{aligned} \quad (7.13)$$

a exemplo do expresso em (4.14).

## 7.2- Primeiro Exemplo de Aplicação

Considere-se novamente o edifício discutido no item 5.4, supondo-se agora uma massa distribuída de uma tonelada (massa) por metro quadrado de piso, ou seja:

$$m = \frac{(1t/m^2) \times 75m^2}{3m} = 25t/m = 25000kg/m$$

$$J_m = \frac{1t/m^2}{3m} \left[ 2 \left( \frac{10 \times 5^3}{12} + 10 \times 5 \times 1,676^2 + \frac{5 \times 5^3}{12} + 5 \times 5 \times 3,33^2 \right) \right] = 381,9tm$$

$$= 3,819 \times 10^5 kgm$$

e a equação de equilíbrio (7.6) ganha nesse caso a redação:

$$-\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U^*(z) \\ V^*(z) \\ W^*(z) \end{Bmatrix}^{IV} + 89 \times 10^{-14} \omega^2 \begin{bmatrix} 11,11 & 0 & -4,701 \\ 0 & 1,976 & 1,453 \\ -4,701 & 1,453 & 5,797 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U^*(z) \\ V^*(z) \\ W^*(z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

bem como as raízes decorrentes de (7.8):

$$\sigma_1 = 13,53 \times 10^{-11} N^{-1} m^{-1}$$

$$\sigma_2 = 3,953 \times 10^{-11} N^{-1} m^{-1}$$

$$\sigma_3 = 1,106 \times 10^{-8} N^{-1} m^{-1}$$

resultando-se nas frequências naturais correspondentes arroladas na Tabela 7.1

Tabela 7.1

Frequência Hz	1ºmodo	2ºmodo	3ºmodo
$f_{11} = \omega_{11}/2\pi$	0.0843	0.5291	1.479
$f_{12} = \omega_{12}/2\pi$	0.1560	0.9804	2.732
$f_{13} = \omega_{13}/2\pi$	0.2950	1.8450	5.181

## 7.3- Associação Tridimensional de Pórticos com Colunas Deformáveis Axialmente

A equação de equilíbrio dinâmico da associação tridimensional de pórticos com colunas indeformáveis axialmente tem a seguinte redação no sistema de referência central do conjunto de paredes:

$$-\begin{bmatrix} J_{aa} & 0 & 0 \\ 0 & J_{bb} & 0 \\ 0 & 0 & J_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{U}(z) \\ \bar{V}(z) \\ \bar{W}(z) \end{Bmatrix}^{VI} + \begin{bmatrix} S_{aa} & S_{ab} & S_{ac} \\ S_{ab} & S_{bb} & S_{bc} \\ S_{ac} & S_{bc} & S_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{U}(z) \\ \bar{V}(z) \\ \bar{W}(z) \end{Bmatrix}^{VI} +$$

$$m \begin{bmatrix} 1 & 0 & -b_p \\ 0 & 1 & a_p \\ -b_p & a_p & b_p^2 + a_p^2 + J_m/m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{S}_f \\ \bar{K}_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\bar{U}}(z) \\ \ddot{\bar{V}}(z) \\ \ddot{\bar{W}}(z) \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \ddot{\bar{U}}(z) \\ \ddot{\bar{V}}(z) \\ \ddot{\bar{W}}(z) \end{Bmatrix}^{II} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7.14)$$

resultando-se na equação de frequências:

$$\begin{aligned}
 & - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2(z) \\ V_2(z) \\ W_2(z) \end{Bmatrix}^V + \\
 & + \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2(z) \\ V_2(z) \\ W_2(z) \end{Bmatrix}^{\text{III}} + \\
 & - m\omega^2 \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\bar{S}_f}{\bar{K}_0} \begin{Bmatrix} U_2(z) \\ V_2(z) \\ W_2(z) \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} U_2(z) \\ V_2(z) \\ W_2(z) \end{Bmatrix}^{\text{II}} \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{7.15}$$

onde  $\sigma_i$  são obtidos como em (5.18) e:

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= \frac{\ell_1^2}{J_{aa}} - 2 \frac{b_\rho \ell_1 n_1}{\sqrt{J_{aa} J_{cc}}} + \frac{m_1^2}{J_{bb}} + 2 \frac{a_\rho m_1 n_1}{\sqrt{J_{bb} J_{cc}}} + \frac{n_1^2 (a_\rho^2 + b_\rho^2 + J_m / m)}{J_{cc}} \\
 A_{22} &= \frac{\ell_2^2}{J_{aa}} - 2 \frac{b_\rho \ell_2 n_2}{\sqrt{J_{aa} J_{cc}}} + \frac{m_2^2}{J_{bb}} + 2 \frac{a_\rho m_2 n_2}{\sqrt{J_{bb} J_{cc}}} + \frac{n_2^2 (a_\rho^2 + b_\rho^2 + J_m / m)}{J_{cc}} \\
 A_{33} &= \frac{\ell_3^2}{J_{aa}} - 2 \frac{b_\rho \ell_3 n_3}{\sqrt{J_{aa} J_{cc}}} + \frac{m_3^2}{J_{bb}} + 2 \frac{a_\rho m_3 n_3}{\sqrt{J_{bb} J_{cc}}} + \frac{n_3^2 (a_\rho^2 + b_\rho^2 + J_m / m)}{J_{cc}} \\
 A_{12} &= \frac{\ell_1 \ell_2}{J_{aa}} - \frac{b_\rho (\ell_2 n_1 + \ell_1 n_2)}{\sqrt{J_{aa} J_{cc}}} + \frac{m_1 m_2}{J_{bb}} + \frac{a_\rho (m_2 n_1 + m_1 n_2)}{\sqrt{J_{bb} J_{cc}}} + \frac{n_1 n_2 (a_\rho^2 + b_\rho^2 + J_m / m)}{J_{cc}} \\
 A_{13} &= \frac{\ell_1 \ell_3}{J_{aa}} - \frac{b_\rho (\ell_3 n_1 + \ell_1 n_3)}{\sqrt{J_{aa} J_{cc}}} + \frac{m_1 m_3}{J_{bb}} + \frac{a_\rho (m_3 n_1 + m_1 n_3)}{\sqrt{J_{bb} J_{cc}}} + \frac{n_1 n_3 (a_\rho^2 + b_\rho^2 + J_m / m)}{J_{cc}} \\
 A_{23} &= \frac{\ell_2 \ell_3}{J_{aa}} - \frac{b_\rho (\ell_3 n_2 + \ell_2 n_3)}{\sqrt{J_{aa} J_{cc}}} + \frac{m_2 m_3}{J_{bb}} + \frac{a_\rho (m_3 n_2 + m_2 n_3)}{\sqrt{J_{bb} J_{cc}}} + \frac{n_2 n_3 (a_\rho^2 + b_\rho^2 + J_m / m)}{J_{cc}}
 \end{aligned} \tag{7.16}$$

como já exposto em (6.26), sendo  $\ell_i$ ,  $m_i$  e  $n_i$  as componentes dos autovetores expressos em (5.21). Considerações similares às levadas a efeito no final do item 6.3 do Capítulo anterior, a equação (7.15) passa a ter a redação:

$$\begin{aligned}
& - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2(z) \\ V_2(z) \\ W_2(z) \end{Bmatrix}_a^{VI} + \\
& + \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2(z) \\ V_2(z) \\ W_2(z) \end{Bmatrix}_a^{IV} + \\
& - m\omega^2 \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix} \left( \frac{\bar{s}_f}{\bar{K}_0} \begin{Bmatrix} U_2(z) \\ V_2(z) \\ W_2(z) \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} U_2(z) \\ V_2(z) \\ W_2(z) \end{Bmatrix}^{II} \right) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{7.17}$$

cujas equações desacopladas são do tipo:

$$-\phi_i^{VI}(z) + \sigma_i \phi_i^{IV}(z) - m\omega^2 A_{ii} \left( \frac{\bar{s}_f}{\bar{K}_0} \phi_i(z) - \phi_i^{II}(z) \right) = 0 \tag{7.18}$$

cujos autovalores correspondem aos períodos naturais expressos por:

$$T_{ij} = a_j H^2 \sqrt{mA_{ii}} \tag{7.19}$$

com os parâmetros  $a_i$  arrolados na Tabela 3.1 do Capítulo III para valores dos parâmetros:

$$\begin{aligned}
\lambda_i &= H\sqrt{\sigma_i} \\
\mu_i &= \sqrt{\frac{\sigma_i \bar{K}_0}{\sigma_i \bar{K}_0 - \bar{s}_f}}
\end{aligned} \tag{7.20}$$

a exemplo do exposto em (6.31).

#### 7.4- Segundo Exemplo de Aplicação

Considere-se novamente o edifício cuja planta exibe-se na Figura 5.6, que, no sistema de referência original (eixos centrais do conjunto de paredes), tem centro de massa na posição  $a_m = 0$ , devido a simetria, e  $b_m = 1.5\text{m}$ . Assim, o equilíbrio dinâmico naquele sistema de referência fica:

$$\begin{aligned}
& -10^6 \begin{bmatrix} 2.26 & 0 & 0 \\ 0 & 4.939 & 0 \\ 0 & 0 & 20.23 \times 10^6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \end{Bmatrix}^V + 10^6 \begin{bmatrix} 1.116 & 0 & -82.248 \\ 0 & 0.3427 & 0 \\ -82.248 & 0 & 29,758 \times 10^4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \end{Bmatrix}^{III} \\
& = 25 \times 10^3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1.5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1.5 & 0 & 17.526 \end{bmatrix} \left[ 2.62 \times 10^{-8} \begin{Bmatrix} \ddot{U}(z) \\ \ddot{V}(z) \\ \ddot{W}(z) \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \ddot{U}(z) \\ \ddot{V}(z) \\ \ddot{W}(z) \end{Bmatrix}^{II} \right] = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}
\end{aligned}$$

resultando na (7.15) com os seguintes dados:



$$\mu_1 \cong \mu_2 \cong \mu_3 \cong 1.0$$

$$\sigma_1 = 49.801 \times 10^{-2} \rightarrow \lambda_1 = 25.4 \rightarrow s \gg 74 \rightarrow \begin{cases} a_1 = 0.2 \\ a_2 = 0.07 \\ a_3 = 0.03 \end{cases}$$

$$\sigma_2 = 6.9386 \times 10^{-2} \rightarrow \lambda_2 = 9.48 \rightarrow s = 20.8 \rightarrow \begin{cases} a_1 = 0.4 \\ a_2 = 0.13 \\ a_3 = 0.062 \end{cases}$$

$$\sigma_3 = 14.288 \times 10^{-2} \rightarrow \lambda_3 = 13.6 \rightarrow s = 38 \rightarrow \begin{cases} a_1 = 0.28 \\ a_2 = 0.09 \\ a_3 = 0.05 \end{cases}$$

$$A_{11} = 0.444 \times 10^{-9}$$

$$A_{22} = 0.2025 \times 10^{-9}$$

$$A_{33} = 0.0264 \times 10^{-9}$$

$$A_{12} = 0$$

$$A_{13} = -0.0235 \times 10^{-9}$$

$$A_{23} = 0$$

Com esses dados, e tendo-se em conta que a massa por unidade de altura vale  $m = 25/300$ , os resultados dos períodos naturais estão arrolados na Tabela 7.2:

Tabela 7.2

$\sigma_i$ $N^{-1}m^{-1}$	$\lambda_i$	$A_{ii}$ $N^{-1}m^{-2}$	1º Modo seg.	2º Modo seg.	3º Modo seg.
$49.8 \times 10^{-2}$	25.4	$0.444 \times 10^{-9}$	1.63	0.571	0.244
$6.94 \times 10^{-2}$	9.48	$0.2025 \times 10^{-9}$	2.21	0.716	0.342
$14.3 \times 10^{-2}$	13.6	$2.64 \times 10^{-9}$	0.557	0.179	0.0994

Valendo-se registrar que, na estrutura real, esses períodos são associados a movimentos acoplados como indicado em (6.21).

A título de comparação, a tabela 7.3 exhibe os seis primeiros períodos naturais em segundos obtidos pela técnica do meio contínuo e pela simulação feita com o Ansys empregando-se o elemento de vigas e pilares Beam 188 e para as lajes o elemento 181, perfazendo-se algo como  $3 \times 10^5$  graus de liberdade. Como pode ser verificado, os resultados acham-se dentro de uma gama de valores próximos.

Tabela 7.3

	1º modo	2º modo	3º modo	4º modo	5º modo	6º modo
Tec. Cont.	2.21	1.63	0.716	0.571	0.557	0.342
Ansys	2.04	2.02	1.93	0.645	0.624	0.616

## CAPÍTULO VIII

### TEMAS COMPLEMENTARES

#### 8.1- Associação de Paredes por Lintéis

A Figura 8.1 ilustra o caso de duas paredes ligas por lintéis onde indicam-se as principais características geométricas, bem como a configuração genérica da deformada do conjunto, valendo as seguintes relações:

$$f_1 = f_2 + f_2' + f_3' \quad (8.1)$$

onde  $f_2$  vem a ser a distância entre as seções transversais tendo-se em conta a deformação axial das colunas,  $f_2'$  e  $f_3'$  são as deformações nas colunas por efeito da força normal. A movimentação do conjunto implica em:

$$f_1 = 2c \frac{du(z)}{dz} \quad (8.2)$$

$$f_2' + f_3' = \frac{1}{E_p} \left( \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} \right) \int_0^z N dz$$

onde  $\frac{du(z)}{dz}$  vem a ser a inclinação do conjunto, bem como a consideração da deformação axial das paredes, onde  $E_p$  é o módulo de elasticidade das paredes, e  $S_1$  e  $S_2$  as áreas da seção transversal das paredes, e  $N$  a força normal atuante nas paredes. Por outro lado, o momento fletor no lintel, em decorrência da Teoria Técnica da Flexão, vale:

$$M_\ell = \frac{6E_\ell I_\ell}{(2a)^2} f_2 \quad (8.3)$$

onde  $E_\ell$  e  $I_\ell$  são, respectivamente, o módulo de elasticidade e o momento de inércia dos lintéis, e, portanto:

$$f_2 = \frac{2a^3}{3E_\ell I_\ell} V_\ell \quad (8.4)$$

visto que a cortante no lintel vale  $V_\ell = M_\ell / a$ .

Tendo-se em conta (8.4), (8.1) e a primeira de (8.2), a seguinte relação pode ser obtida:

$$2c \frac{du(z)}{dz} = \frac{2a^3}{3E_\ell I_\ell} V_\ell + \frac{1}{E_p} \left( \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} \right) \int_0^z N dz \quad (8.5)$$

e, por derivação:

$$2c \frac{d^3 u(z)}{dz^3} = \frac{2a^3}{3E_\ell I_\ell} \frac{d^2 V_\ell}{dz^2} + \frac{1}{E_p} \left( \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} \right) \frac{dN}{dz} \quad (8.6)$$

ou ainda:

$$2c \frac{d^3 u(z)}{dz^3} = \frac{2a^3}{3E_\ell I_\ell} \frac{d^2 V_\ell}{dz^2} - \frac{1}{E_p} \left( \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} \right) \frac{V_\ell}{h} \quad (8.7)$$

onde  $h$  é o pé-direito do andar, visto que o equilíbrio axial ilustrado na Figura 8.2 implica em:

$$\frac{dN}{dz} = -\frac{V_\ell}{h} \quad (8.8)$$

assumindo-se, pois, a distribuição contínua dos esforços (hipótese básica da Técnica do Meio Contínuo), ou seja, assumindo-se que a força cortante do lintel seja substituída por uma força axial distribuída equivalente.

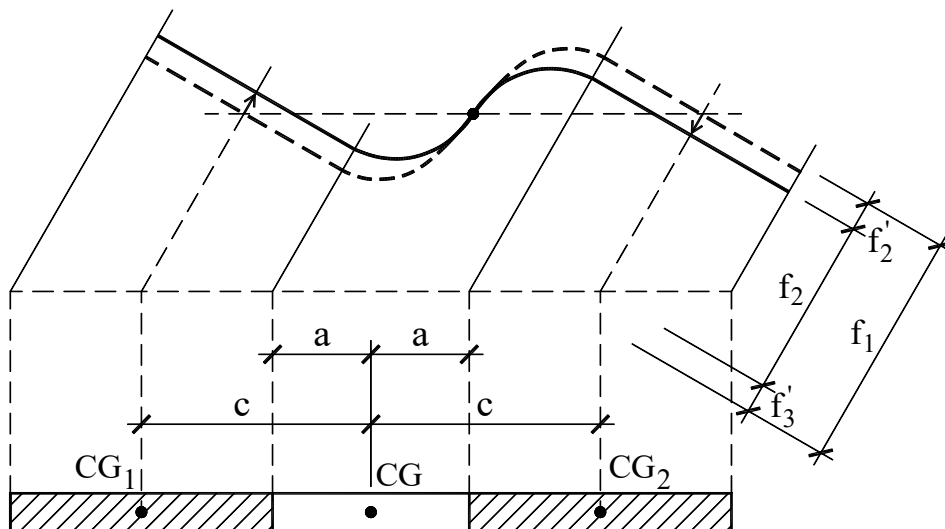


Figura 8.1

O equilíbrio de momentos nas paredes implica em:

$$\begin{aligned} \frac{dM_1}{dz} &= -V_1 + \frac{V_\ell}{h} (a + b_1) \\ \frac{dM_2}{dz} &= -V_2 + \frac{V_\ell}{h} (a + b_1) \end{aligned} \quad (8.9)$$

onde  $M_1$  e  $M_2$  são os momentos fletores nas paredes, resultando-se no equilíbrio do conjunto:

$$E_p (I_1 + I_2) \frac{d^3 u(z)}{dz^3} = -V + 2 \frac{V_\ell c}{h} \quad (8.10)$$

já tendo-se em conta a relação momento-curvatura, onde  $V = V_1 + V_2$  vem a ser a força cortante no conjunto.

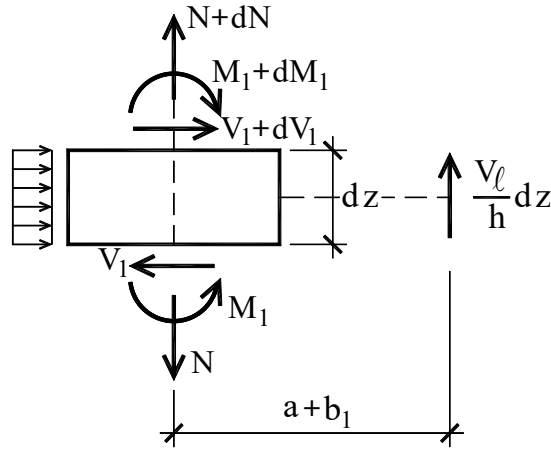


Figura 8.2

O expresso em (8.10) permite uma nova redação para (8.7), ou seja:

$$K \frac{d^5 u(z)}{dz^5} - \left( \frac{6c^2 K_\ell}{a^3 h} + \frac{3K_\ell K}{a^3 h E_p S} \right) \frac{d^3 u(z)}{dz^3} + \frac{d^2 V}{dz^2} - \frac{3K_\ell}{a^3 h E_c S} V = 0 \quad (8.11)$$

onde

$$\begin{aligned} K &= E_p (E_1 + E_2)_\ell \\ K_\ell &= E_\ell I_\ell \end{aligned} \quad (8.12)$$

ou ainda:

$$K \frac{d^5 u(z)}{dz^5} - \frac{6K_\ell c^2}{a^3 h} \left( 1 + \frac{K}{K_0} \right) \frac{d^3 u(z)}{dz^3} + \frac{d^2 V}{dz^2} - \frac{6K_\ell c^2}{ha^2 K_0} V = 0 \quad (8.13)$$

onde:

$$K_0 = 2E_p S c^2 \quad (8.14)$$

e, finalmente:

$$K \frac{d^5 u(z)}{dz^5} - s_f \mu^2 \frac{d^3 u(z)}{dz^3} + \frac{d^2 V}{dz^2} - \frac{s_f}{K_0} V = 0 \quad (8.15)$$

onde:

$$\begin{aligned} s_f &= \frac{6K_\ell c^2}{ha^3} \\ \mu^2 &= 1 + \frac{K}{K_0} \end{aligned} \quad (8.16)$$

que consiste na derivação de (2.32); lembrando-se que, nesse caso, a consideração de flexão global da coluna não tem correção ( $R_1 = 1$ ); em outras palavras, a solução de (8.13), considerando-se carga uniformemente distribuída horizontal  $q$ , é a mesma já expressa em (2.36) mediante uma nova expressão para o parâmetro  $s_f$ .

## 8.2- Efeito das Variações de Temperatura

As variações de temperatura provocam alongamentos diferentes nos elementos expostos e não expostos da estrutura de edifício e, por conseguinte, distorções nos quadros divisórios, bem como esforços adicionais nos diversos elementos da estrutura. Como bem chama a atenção Weidlinger (P. Weidlinger, *Temperature Stresses in tall Reinforced Concrete Buildings*, Civil Engineering, ASCE, 1963) tais distorções podem provocar fissuras nos quadros divisórios, podendo os esforços adquirirem magnitudes não desprezíveis. Além disso, sabidamente as variações de temperatura provocam efeitos consideráveis apenas nos elementos mais externos da estrutura como ilustrado na Figura 8.3a).

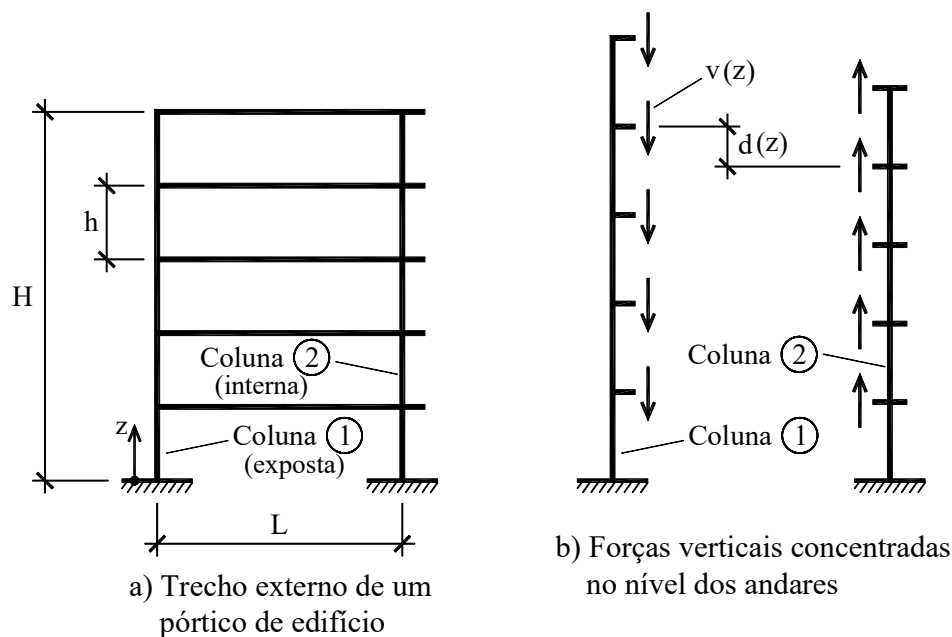


Figura 8.3

A Figura 8.3b) exibe a indicação das forças introduzidas pelas vigas nas colunas, as quais, assumindo-se regime linear, se expressam por:

$$V(z) = kd(z) \quad (8.17)$$

sendo  $V(z)$  a força em questão,  $k$  a constante de proporcionalidade e  $d(z)$  o deslocamento relativo entre as colunas, ou ainda, como apresentado pelo autor em seu artigo “Efeito das Variações de Temperatura em Estruturas de Edifícios Altos” (Revista Brasileira de Tecnologia, V 9, Ns 1 e 2, Março/Junho/1978):

$$v(z) = \frac{V(z)}{h} = \frac{k}{h} d(z) \quad (8.18)$$

onde  $v(z)$  é a força distribuída correspondente, assumindo-se, como próprio da técnica do meio contínuo, que tal força venha a ser continuamente distribuídas, como ilustrado na Figura 8.4a).

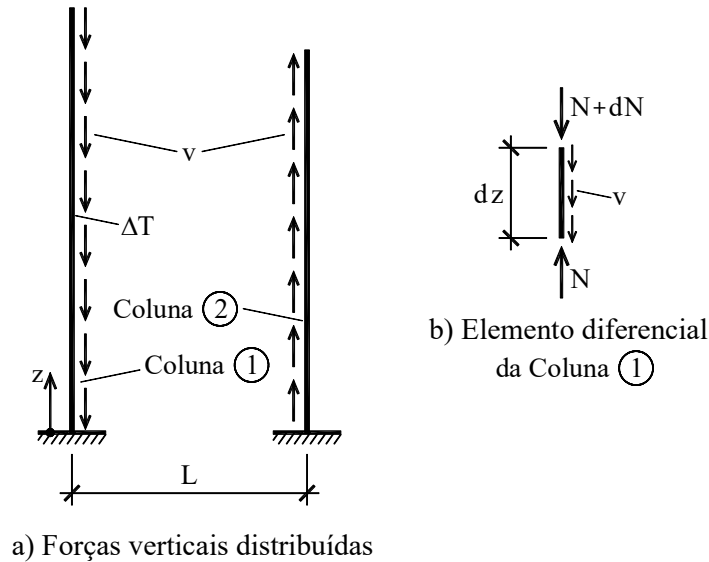


Figura 8.4

O equilíbrio axial da coluna ganha, como indicado na Figura 8.4b), a seguinte redação:

$$\frac{dN(z)}{dz} + \frac{k}{h} d(z) = 0 \quad (8.19)$$

e, por outro lado, o deslocamento relativo se expressa:

$$d(z) = z\alpha\Delta T - \int_0^z \frac{N(z)}{ES_1} dz - \int_0^z \frac{N(z)}{ES_2} dz \quad (8.20)$$

onde  $\alpha$  é o coeficiente de dilatação térmica do material,  $\Delta T$  a diferença de temperatura considerada  $E$  o módulo de elasticidade do material e  $S_1$  e  $S_2$  a área da seção transversal das colunas 1 e 2, respectivamente. Assim, por derivação, o equilíbrio expresso em (8.17) ganha uma nova redação, ou seja:

$$\frac{d^2N(z)}{dz^2} + \frac{k}{h} \left( \alpha\Delta T - \frac{S_1 + S_2}{ES_1S_2} N(z) \right) = 0 \quad (8.21)$$

consistindo-se numa equação diferencial com as condições de contorno:

$$\begin{aligned} \frac{dN(z=0)}{dz} &= 0 \\ N(z=H) &= 0 \end{aligned} \quad (8.22)$$

sendo a primeira de (8.22) decorrente do exposto em (8.20), visto que na base o deslocamento relativo é nulo, e a segunda do fato de ser nula a força normal no topo.

A integração de (8.19) se expressa:

$$N(z) = N_p + A(e^{\beta z} + e^{-\beta z}) \quad (8.21)$$

onde:

$$N_p = \frac{E\alpha\Delta TS_1S_2}{S_1 + S_2}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{k(S_1 + S_2)}{h(ES_1S_2)}} \quad (8.22)$$

$$A = \frac{N_p}{e^{\beta H} + e^{-\beta H}}$$

restando-se agora avaliar a constante de proporcionalidade nos termos de (8.17).

Para tanto, considere-se a configuração de deformação de um quadro exibida na Figura A3a) para um deslocamento vertical relativo entre as colunas. Assumindo-se que os pontos de inflexão das colunas e vigas situam-se no meio do vão, e com a notação para os momentos fletores indicados na Figura A3b), tem-se:

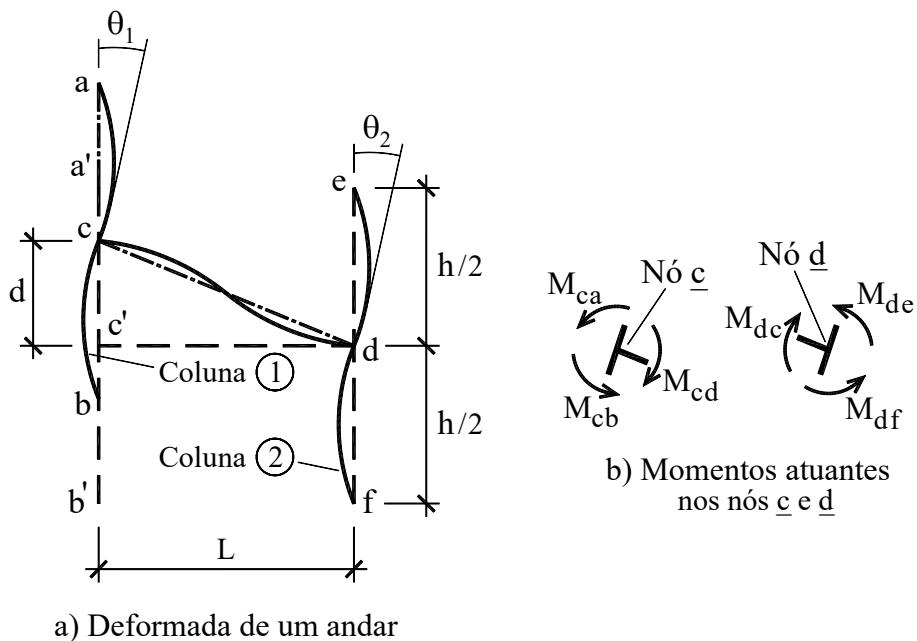


Figura 8.5

$$\begin{aligned}
 M_{ca} &= 6Ek_{c1}\theta_1 \\
 M_{cb} &= 6Ek_{c2}\theta_1 \\
 M_{cd} &= Ek_v \left( 6\frac{d}{L} - 4\theta_1 - 2\theta_2 \right)
 \end{aligned} \tag{8.23}$$

onde:

$$\begin{aligned}
 k_{c1} &= J_{c1} / h \\
 k_{c2} &= J_{c2} / h \\
 k_v &= J_v / L
 \end{aligned} \tag{8.24}$$

onde  $J_{c1}$  e  $J_{c2}$  são respectivamente os momentos de inércia da seção transversal das colunas 1 e 2,  $J_v$  o momento de inércia da viga, e  $\theta_1$  e  $\theta_2$  a rotação dos nós da coluna 1 e 2, respectivamente. Os momentos atuantes no nó da coluna 2 são similares ao expresso em (8.23). O equilíbrio de momentos nos nós c e d fornecem:

$$\begin{aligned}
 (12Ek_{c1} + 4Ek_v)\theta_1 + 2Ek_v\theta_2 &= \frac{6Ek_v}{L} d(z) \\
 (12Ek_{c1} + 4Ek_v)\theta_2 + 2Ek_v\theta_1 &= \frac{6Ek_v}{L} d(z)
 \end{aligned} \tag{8.25}$$

resultando-se:

$$k = \frac{12Ek_v}{L_2} \left( 1 - \frac{k_v(3k_{c1} + 3k_{c2} + k_v)}{12k_{c1}k_{c2} + k_v^2 + 4k_v(k_{c1} + k_{c2})} \right) \tag{8.26}$$

tendo-se em vista que:

$$V = \frac{M_{cd} + M_{dc}}{L} \tag{8.27}$$

tendo-se em vista (8.15).

### 8.3- Exemplo de Aplicação

Considere-se o caso de um pórtico de edifício de 10 andares no qual as colunas têm seção de 0.12mx0.30m, e vigas com seção de 0.12mx0.40m, o coeficiente de dilatação térmica do concreto  $\alpha = 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$  e módulo de elasticidade  $E = 2800 \text{ kN/cm}^2$ . Assumindo-se variação de temperatura  $\Delta T = 20 \text{ } ^\circ\text{C}$ , algo indicado para climas tropicais, tem-se:

$$\begin{aligned}
 C &= 82.6 \times 10^{-3} \text{ kN/cm}^2 \\
 \alpha \Delta T &= 2 \times 10^{-4} \\
 \frac{S_1 + S_2}{ES_1S_2} &= 7.94 \times 10^{-5} \text{ kN}^{-1}
 \end{aligned} \tag{8.28}$$

resultando-se:



$$\begin{aligned}
 N_p &= 251.9\text{kN} \\
 \beta &= 2.56 \times 10^{-4} \text{ cm}^{-1} \\
 A &= -96.2\text{kN} \\
 N(z) &= 251,9 - 96,2 \left( e^{2.56 \times 10^{-4} z} + e^{-2.56 \times 10^{-4} z} \right) \\
 \gamma(z) &= \frac{d(z)}{L} = 0.75 \times 10^{-3} \left( e^{2.56 \times 10^{-4} z} + e^{-2.56 \times 10^{-4} z} \right)
 \end{aligned}
 \tag{8.29}$$

cujo diagrama de normal acha-se representado na Figura 8.6 em comparação com resultados encontrados pelo método discreto da IBM (stress).

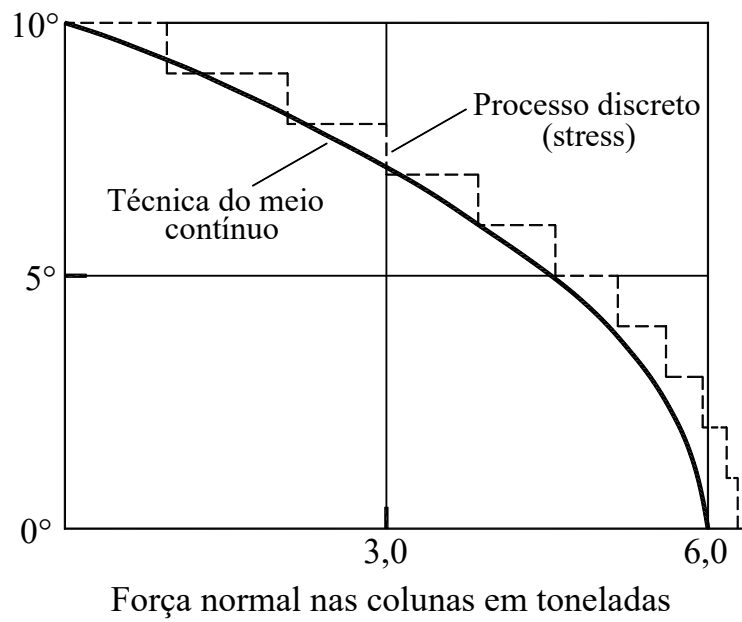


Figura 8.6